Владикавказский математический журнал
2021, Том 23, Выпуск 2, С. 5–18

УДК 517.95
DOI 10.46698/d3710-0726-7542-i

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ж. А. Балкизов[1], А. Г. Езаова[2], Л. В. Канукоева[2]
[1] Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
360005, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а;
[2] Институт физики и математики КБГУ,
360005, Нальчик, ул. Чернышевского, 175
E-mail: giraslan@yandex.ru, alena_ezaova@mail.ru, armand97a@gmail.com

Аннотация. В рамках данной работы исследована краевая задача со смещением для неоднородного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка, когда в качестве одного из граничных условий задана линейная комбинация значений искомой функции на независимых характеристиках. В работе получены следующие результаты: показано неравноправие характеристик AC и BC, ограничивающих гиперболическую часть Ω_1 области Ω, как носителей данных задачи Трикоми при $0 \leqslant x \leqslant \pi n$, $n \in \mathbb{N}$. Из разрешимости задачи Трикоми с данными на характеристике BC в этом случае, вообще говоря, не следует разрешимость задачи Трикоми с данными на характеристике AC; найдены необходимые и достаточные условия существования и единственности регулярного решения исследуемой задачи. При определенных условиях на заданные функции, решение исследуемой задачи выписано в явном виде. Показано, что при нарушении найденных в работе необходимых условий на заданные функции, однородная задача, соответствующая исследуемой задаче имеет бесчисленное множество линейно независимых решений, а множество решений соответствующей неоднородной задачи может существовать только при дополнительном требовании на заданные функции.

Ключевые слова: уравнение параболо-гиперболического типа, уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, неоднородное волновое уравнение, задача Трикоми, задача со смещением, метод Трикоми, метод функции Грина, метод интегральных уравнений.

Mathematical Subject Classification (2010): 35M12, 35M32.

Образец цитирования: *Балкизов Ж. А., Езаова А. Г., Канукоева Л. В.* Краевая задача со смещением для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, вып. 2.—С. 5–18. DOI: 10.46698/d3710-0726-7542-i.

1. Введение. Постановка задачи

На евклидовой плоскости независимых переменных x и y рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_{yy} - f_1, & y < 0, \\ u_{xxx} - u_y - f_2, & y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $f_1 = f_1(x,y)$, $f_2 = f_2(x,y)$ — заданные функции, $u = u(x,y)$ — искомая функция.

Уравнение (1) при $y < 0$ совпадает с неоднородным волновым уравнением

$$u_{xx} - u_{yy} = f_1(x,y), \tag{2}$$

а при $y>0$ является неоднородным уравнением третьего порядка с кратными характеристиками [1, с. 9] параболического типа [2, с. 72] вида

$$u_{xxx}-u_y=f_2\left(x,y\right). \tag{3}$$

Уравнение (1) рассматривается в области Ω, ограниченной характеристиками AC : $x+y=0$ и CB : $x-y=r$ уравнения (2) при $y<0$, выходящими из точки $C=\left(\frac{r}{2},-\frac{r}{2}\right)$ и проходящими через точки $A=(0,0)$ и $B=(r,0)$ соответственно, а также прямоугольником с вершинами в точках A, B, $A_0=(0,h)$, $B_0=(r,h)$, $h>0$, при $y>0$. Обозначим $\Omega_1=\Omega\cap\{y<0\}$, $\Omega_2=\Omega\cap\{y>0\}$, $I=\{(x,0):0<x<r\}$, $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup I$.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u=u\left(x,y\right)$ из класса $C\left(\bar{\Omega}\right)\cap C^1\left(\Omega\right)\cap C^2\left(\Omega_1\right)\cap C^3_x\left(\Omega_2\right)$, $u_x(x,0),u_y(x,0)\in L_1(0,r)$, $u_{xx}(x,0)\in L_2(0,r)$, удовлетворяющую уравнению (1).

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u\left(0,y\right)=\varphi_1\left(y\right),\quad u\left(r,y\right)=\varphi_2\left(y\right),\quad u_{xx}\left(0,y\right)=\varphi_3\left(y\right),\quad 0\leqslant y<h, \tag{4}$$

$$\alpha\left(x\right)u\left[\theta_0\left(x\right)\right]+\beta\left(x\right)u\left[\theta_r\left(x\right)\right]=\psi\left(x\right),\quad 0\leqslant x\leqslant r, \tag{5}$$

где $\theta_0\left(x\right)=\left(\frac{x}{2};-\frac{x}{2}\right)$, $\theta_r\left(x\right)=\left(\frac{x+r}{2};\frac{x-r}{2}\right)$ — аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (2), выходящих из точки $(x,0)$ с характеристиками AC и BC соответственно; $\varphi_1\left(y\right)$, $\varphi_2\left(y\right)$, $\varphi_3\left(y\right)$; $\alpha\left(x\right)$, $\beta\left(x\right)$, $\psi\left(x\right)$ — заданные функции, причем $\alpha^2\left(x\right)+\beta^2\left(x\right)\neq 0$ для любого $x\in[0,r]$ и выполнено условие согласования $\alpha\left(r\right)\left[\alpha\left(0\right)\varphi_1\left(0\right)-\psi\left(0\right)\right]=\beta\left(0\right)\left[\beta\left(r\right)\varphi_2\left(0\right)-\psi\left(r\right)\right]$.

Сформулированная задача 1 относится к классу нелокальных краевых задач со смещением А. М. Нахушева [3].

Впервые задача с граничным условием, связывающим значения искомой функции на двух характеристиках из разных семейств в гиперболической части области для уравнения Лаврентьева — Бицадзе была сформулирована и исследована в работе [4]. В работах [5, 6] были введены понятие краевой задачи со смещением и исследован ряд нелокальных краевых задач с различными видами смещений для гиперболических, вырождающихся гиперболических и смешанного типа уравнений. В частности, в работе [5] была обобщена постановка первой задачи Дарбу для волнового уравнения (2) с начальным условием

$$u\left(x,\,0\right)=\tau\left(x\right),\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{6}$$

и нелокальным условием вида (5). Показано, что условия $\alpha^2\left(1\right)+\beta^2\left(0\right)\neq 0$; $\alpha\left(x\right)\neq\beta\left(x\right)$ для любого $x\in[0,1]$; $\alpha\left(x\right),\beta\left(x\right),\tau\left(x\right),\psi\left(x\right)\in C\left[0,1\right]\cap C^2\left]0,1\right[$ на заданные функции $\alpha\left(x\right)$, $\beta\left(x\right)$, $\tau\left(x\right)$, $\psi\left(x\right)$ обеспечивают корректность исследуемой задачи со смещением.

В работе [6] дана методика постановки нелокальных краевых задач со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения вида

$$\left(-y\right)^m u_{xx}-u_{yy}=0,\quad m=\mathrm{const}>0, \tag{7}$$

с использованием понятия оператора дробного интегро-дифференцирования. Найдены критерии однозначной разрешимости задачи с условиями (6) и

$$\alpha\left(x\right)D^{1-\varepsilon}_{0x}u\left[\theta_0\left(x\right)\right]+\beta\left(x\right)D^{1-\varepsilon}_{xr}u\left[\theta_r\left(x\right)\right]=\psi\left(x\right),\quad 0<x<r,$$

для уравнения (7), где $\theta_0\left(x\right)$, $\theta_r\left(x\right)$, как и выше, определяются как аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (7), причем $2\left(m+2\right)\varepsilon=m$.

В работе [7] изучены первая и вторая задачи Дарбу для класса вырождающихся гиперболических уравнений. Найдены достаточные условия на заданные функции, при которых исследуемые задачи разрешимы. Здесь же показано, что для уравнения Бицадзе — Лыкова

$$y^2 u_{xx} - u_{yy} + u_x = 0,$$

которое рассматривается в области D, ограниченной характеристиками $AC: \, 2x - y^2 = 0$, $BC: \, 2x + y^2 = 2r, \quad 0 \leqslant x \leqslant r$, и отрезком $I \equiv AB$ прямой $y = 0$, корректна поставлена задача Дарбу со следующими данными:

$$u_y\,(x,0) = \nu\,(x)\,, \quad u\,(x,y)\,|_{AC} = \psi\,(x)\,, \quad 0 < x < r.$$

В то же время, однородная задача Дарбу для данного уравнения с данными

$$u_y\,(x,0) = 0, \quad u\,(x,y)\,|_{BC} = 0, \quad 0 < x < r,$$

имеет ненулевые решения вида $u\,(x,y) = g\left(x + \frac{1}{2}y^2\right) - g\,(r)$, где $g = g\,(x)$ — произвольная функция из класса $g\,(x) \in C^1\left[\frac{r}{2}, r\right] \cap C^2\left]\frac{r}{2}, r\right[$, что говорит о неравноправности характеристик AC и BC как носителей данных второй задачи Дарбу для уравнения Бицадзе — Лыкова.

Весьма важные применения задачи со смещением находят при математическом моделировании задач биологической синергетики, трансзвуковой газовой динамики. Подобные нелокальные граничные условия возникают при изучении вопросов тепло и массообмена в капиллярно-пористых средах, при математическом моделировании задач газовой динамики и нелокальных физических процессов, при изучении процессов размножения клеток, в теории распространения электромагнитного поля в неоднородной среде [2, 8, 9]. Достаточно полная библиография научных работ, посвященных исследованиям краевых задач со смещениями приведены в монографиях [3, 10–18].

В данной работе исследована краевая задача со смещением для неоднородного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка вида (1). В работе получены следующие результаты: найдены необходимые и достаточные условия существования и единственности регулярного решения исследуемой задачи; показано неравноправие характеристик AC и BC, ограничивающих гиперболическую часть Ω_1 области Ω, как носителей данных задачи Трикоми при $0 \leqslant x \leqslant \pi n$, $n \in \mathbb{N}$, и из разрешимости задачи Трикоми с данными на характеристике BC в этом случае, вообще говоря, не следует разрешимость задачи Трикоми с данными на характеристике AC. При определенных условиях на заданные функции, решение исследуемой задачи выписано в явном виде. Показано, что при нарушении найденных в работе необходимых условий на заданные функции, однородная задача, соответствующая исследуемой задаче имеет бесчисленное множество линейно независимых решений, а множество решений соответствующей неоднородной задачи может существовать только при дополнительном требовании на заданные функции. Среди работ, близко примыкающих к исследуемой, отметим работы [19–24].

2. Теорема о среднем значении

Пусть существует решение задачи (1), (4), (5) и пусть

$$u\,(x,0) = \tau\,(x)\,, \;\; 0 \leqslant x \leqslant r; \quad u_y\,(x,0) = \nu\,(x)\,, \;\; 0 < x < r. \tag{8}$$

Пользуясь методом Трикоми решения краевых задач для уравнений смешанного типа, найдем сначала фундаментальные соотношения между искомыми функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$. Переходя в уравнении (1) к пределу при $y \to +0$, с учетом обозначений (8) сразу получим первое фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из параболической части Ω_2 на линию $y=0$:

$$\tau'''(x) - \nu(x) = f_2(x,0). \tag{9}$$

При предельном переходе к $y \to +0$ из граничных условий (4) получим

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau(r) = \varphi_2(0), \quad \tau''(0) = \varphi_3(0). \tag{10}$$

Найдем теперь фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части Ω_1 области Ω на линию изменения типа $y=0$. С этой целью докажем следующую лемму (теорему) о среднем значении для неоднородного одномерного волнового уравнения (2).

Лемма 1. *Всякое регулярное решение уравнения* (2), *удовлетворяющее условию* $u(x,0)=\tau(x)$ *обладает тем свойством, что*

$$\begin{gathered} u[\theta_0(x)] + u[\theta_r(x)] = \tau(x) + u\left(\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{r}{2}}^{0}\int\limits_{-t}^{r+t} f_1(s,t)\,dsdt \\ -\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{x}{2}}^{0}\int\limits_{-t}^{x+t} f_1(s,t)\,dsdt - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x-r}{2}}^{0}\int\limits_{x-t}^{r+t} f_1(s,t)\,dtds. \end{gathered} \tag{11}$$

$\lhd$ Для доказательства леммы 1 воспользуемся представлением решения задачи (8) для уравнения (2) [25, с. 59]

$$u(x,y) = \frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{y}\int\limits_{x+y-t}^{x-y+t} f_1(s,t)\,dsdt. \tag{12}$$

Из формулы (12) находим

$$\begin{gathered} u[\theta_0(x)] + u[\theta_r(x)] = \frac{\tau(0)+\tau(r)}{2} + \tau(x) - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{r}\nu(t)\,dt \\ -\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{x}{2}}^{0}\int\limits_{-t}^{x+t} f_1(s,t)\,dsdt - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x-r}{2}}^{0}\int\limits_{x-t}^{r+t} f_1(s,t)\,dtds. \end{gathered} \tag{13}$$

С другой стороны, из представления (12) при $(x,y) = \left(\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}\right)$ следует, что

$$\frac{\tau(0)+\tau(r)}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{r}\nu(t)\,dt = u\left(\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{r}{2}}^{0}\int\limits_{-t}^{r+t} f_1(s,t)\,dsdt. \tag{14}$$

Из (13) и (14) приходим к (11). $\rhd$

Далее воспользуемся формулой (11). Найдем значение $u\left(\frac{r}{2};-\frac{r}{2}\right)$. При $x=0$ из условия (5) с учетом первого из условий (10) находим

$$\alpha(0)\,\varphi_1(0)+\beta(0)\,u\left(\frac{r}{2};-\frac{r}{2}\right)=\psi(0),$$

откуда при $\beta(0)\neq 0$ находим

$$u\left(\frac{r}{2};-\frac{r}{2}\right)=\frac{\psi(0)-\alpha(0)\,\varphi_1(0)}{\beta(0)}. \tag{15}$$

Аналогично, при $x=r$ и $\alpha(r)\neq 0$ из (5) и (10) находим, что

$$u\left(\frac{r}{2};-\frac{r}{2}\right)=\frac{\psi(r)-\beta(r)\,\varphi_2(0)}{\alpha(r)}. \tag{16}$$

Таким образом, если $\alpha^2(r)+\beta^2(0)\neq 0$, то значение искомой функции $u(x,y)$ в точке $C=\left(\frac{r}{2};-\frac{r}{2}\right)$ находится по одной из формул (15) или (16). Пусть, например, $\beta(0)\neq 0$. Тогда равенство (11) перепишется в следующем виде:

$$u[\theta_0(x)]+u[\theta_r(x)]=\tau(x)+F_1(x), \tag{17}$$

где

$$F_1(x)=\frac{\psi(0)-\alpha(0)\,\varphi_1(0)}{\beta(0)}+\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\frac{r}{2}}^{0}\int\limits_{-t}^{r+t}-\int\limits_{-\frac{x}{2}}^{0}\int\limits_{-t}^{x+t}-\int\limits_{\frac{x-r}{2}}^{0}\int\limits_{x-t}^{r+t}\right)f_1(s,t)\,dtds.$$

3. Исследование задачи 1 в случае, когда $\alpha(x)\equiv\beta(x)$

Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha(x)\equiv\beta(x)$ для любого $x\in[0,r]$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть заданные функции* $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$; $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\psi(x)$; $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ *таковы, что*

$$\alpha(x)\equiv\beta(x)\neq 0\quad(\forall\,x\in[0,r]), \tag{18}$$

$$\alpha^2(0)+\alpha^2(r)\neq 0, \tag{19}$$

$$\varphi_1(y),\varphi_2(y),\varphi_3(y)\in C[0,h]\cap C^1\,]0,h[, \tag{20}$$

$$\alpha(x),\psi(x)\in C^1[0,r]\cap C^3\,]0,r[, \tag{21}$$

$$f_1(x,y)\in C^1\left(\bar\Omega_1\right),\quad f_2(x,\ y)\in C\left(\bar\Omega_2\right). \tag{22}$$

Тогда существует единственное регулярное в области Ω *решение задачи* 1.

$\lhd$ Действительно, из (5) с учетом (17) и (18) находим

$$\tau(x)=\frac{\psi(x)}{\alpha(x)}-F_1(x).$$

Откуда при условиях (21), (22) из (9) имеем

$$\nu(x)=\tau'''(x)-f_2(x,0)=\left(\frac{\psi(x)}{\alpha(x)}-F_1(x)\right)'''-f_2(x,0).$$

При найденных значениях $\tau(x)$ и $\nu(x)$ решение исходной задачи (1), (4), (5) в области Ω_1 выписывается по формуле (12), а в области Ω_2 решение краевой задачи для уравнения (3) при заданных граничных условиях (4) и при заданном начальном условии $u(x,0)=\tau(x)$ выписывается по формуле

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\left\{\int\limits_0^y G_{\xi\xi}(x,y;0,\eta)\,\varphi_1(\eta)\,d\eta-\int\limits_0^y G_{\xi\xi}(x,y;r,\eta)\,\varphi_2(\eta)\,d\eta\right.$$
$$+\int\limits_0^y G(x,y;0,\eta)\,\varphi_3(\eta)\,d\eta+\int\limits_0^r G(x,y;\xi,0)\,\tau(\xi)\,d\xi$$
$$\left.-\int\limits_0^y\int\limits_0^r G(x,y;\xi,\eta)\,f_2(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\right\}, \qquad (23)$$

где $G(x,y;\xi,\eta)=U(x,y;\xi,\eta)-W(x,y;\xi,\eta)$ — функция Грина оператора $Lu=u_{xxx}-u_y$, $U(x,y;\xi,\eta)$ и $W(x,y;\xi,\eta)$ — фундаментальные решения уравнения (3) [1, с. 135].

Таким образом, в отличие от задачи с условиями (5) и $u(x,0)=\tau(x)$ для строго гиперболического уравнения вида (2) [5], задача со смещением (4)–(5) для уравнения (1) однозначно разрешима даже при $\alpha(x)\equiv\beta(x)\neq 0$ для любого $x\in[0,r]$, лишь бы только заданные функции $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$; $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\psi(x)$; $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ обладали бы свойствами (18)–(22). $\rhd$

4. Исследование задачи 1 в случае, когда $\alpha(x)\neq\beta(x)$ для любого $x\in[0,r]$

Пусть теперь $\alpha(x)\neq\beta(x)$ для любого $x\in[0,r]$. Справедлива следующая теорема единственности регулярного решения задачи (1), (4), (5).

Теорема 2. *Пусть относительно заданных функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$ выполнены следующие условия:*

$$\alpha(x),\beta(x)\in C^2[0,r], \qquad (24)$$

$$\alpha^2(x)+\beta^2(x)\neq 0 \quad (\forall\, x\in[0,r]), \qquad (25)$$

$$\alpha^2(r)+\beta^2(0)\neq 0, \qquad (26)$$

$$\alpha(x)\neq\beta(x) \quad (\forall\, x\in[0,r]), \qquad (27)$$

$$\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\geqslant 0, \quad \left[\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right]''\leqslant 0 \quad (\forall\, x\in[0,r]). \qquad (28)$$

Тогда решение задачи 1 единственно в требуемом классе.

$\lhd$ При условии (27) из (5) и (17) приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} u[\theta_0(x)]+u[\theta_r(x)]=\tau(x)+F_1(x);\\ \alpha(x)\,u[\theta_0(x)]+\beta(x)\,u[\theta_r(x)]=\psi(x), \end{cases} \qquad (29)$$

относительно неизвестных $u[\theta_0(x)]$ и $u[\theta_r(x)]$. Решая систему (29) находим, что

$$u[\theta_0(x)]=\frac{\beta(x)}{\beta(x)-\alpha(x)}\tau(x)+\frac{\beta(x)\,F_1(x)-\psi(x)}{\beta(x)-\alpha(x)}. \qquad (30)$$

Подставляя значение $u\left[\theta_0\left(x\right)\right]$ в (30), а затем дифференцируя полученное равенство, приходим к следующему соотношению:

$$\nu\left(x\right)=\left[a\left(x\right)\tau\left(x\right)\right]'-F_2\left(x\right), \tag{31}$$

где

$$a\left(x\right)=\frac{\alpha\left(x\right)+\beta\left(x\right)}{\alpha\left(x\right)-\beta\left(x\right)},\quad F_2\left(x\right)=2\left[\frac{\beta\left(x\right)F_1\left(x\right)-\psi\left(x\right)}{\alpha\left(x\right)-\beta\left(x\right)}\right]'-\int\limits_{-x/2}^{0}f_1\left(x+t,t\right)dt.$$

Соотношение (31) есть фундаментальное соотношение между функциями $\tau\left(x\right)$ и $\nu\left(x\right)$ в случае когда соблюдены условия (24)–(27).

Рассмотрим однородную задачу, соответствующую исходной задаче (1), (4), (5), т. е. положим $\varphi_i\left(y\right)=f_j\left(x,y\right)=\psi\left(x\right)\equiv 0,\ i=1,2,3,\ j=1,2,$ и покажем, что при условиях (24)–(28) теоремы 2 задача 1 для уравнения (1) будет обладать только тривиальным решением $u\left(x,y\right)\equiv 0$ в области Ω.

Для однородной задачи, соответствующей задаче 1, соотношения (9), (31), а также условия (10) принимают соответствующий вид:

$$\nu\left(x\right)=\tau'''\left(x\right),\quad 0<x<r, \tag{32}$$

$$\nu\left(x\right)=\left[a\left(x\right)\tau\left(x\right)\right]',\quad 0<x<r, \tag{33}$$

$$\tau\left(0\right)=0,\quad \tau\left(r\right)=0,\quad \tau''\left(0\right)=0. \tag{34}$$

Путем интегрирования по переменной x от 0 до r из соотношений (32) и (33) с учетом первых двух условий из (34), убеждаемся в том, что если однородная задача, соответствующая задаче 1, имеет нетривиальное решение $u\left(x,y\right)\neq 0$, то оно наряду с условиями (34) должно удовлетворять и дополнительному условию вида

$$\tau''\left(r\right)=0. \tag{35}$$

С учетом этого рассмотрим далее интеграл

$$J=\int\limits_0^r\tau'\left(x\right)\nu\left(x\right)\,dx.$$

Умножая обе части соотношения (32) на функцию $\tau'\left(x\right)$, а затем интегрируя полученное равенство в пределах от 0 до r по переменной x, с учетом условий (34), (35), получим, что рассматриваемый интеграл

$$J=\int\limits_0^r\tau'\left(x\right)\nu\left(x\right)dx=\int\limits_0^r\tau'\left(x\right)\tau'''\left(x\right)dx=-\int\limits_0^r\left[\tau''\left(x\right)\right]^2dx\leqslant 0. \tag{36}$$

Аналогично, из соотношения (33) с учетом (34), находим, что

$$J=\int\limits_0^r\tau'\left(x\right)\nu\left(x\right)dx=\int\limits_0^r\tau'\left(x\right)\left[a\left(x\right)\tau\left(x\right)\right]'dx=\int\limits_0^r a\left(x\right)\left[\tau'\left(x\right)\right]^2dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^r a''\left(x\right)\tau^2\left(x\right)dx.$$

Если выполнены условия (24), (28), то, как следует из последнего равенства, рассматриваемый интеграл

$$J = \int\limits_0^r \tau'(x)\,\nu(x)\,dx \geqslant 0. \tag{37}$$

Из неравенств (36) и (37) следует, что $\tau''(x) \equiv 0$ для любого $x \in [0, r]$, откуда при условиях (34) заключаем, что $\tau(x) \equiv 0$ для любого $x \in [0, r]$. При этом из соотношений (32) и (33) сразу следует, что и $\nu(x) \equiv 0$ для любого $x \in [0, r]$. Тогда из представления решения задачи Коши (8) для однородного уравнения, соответствующего уравнению (2) (формулы Даламбера), следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в области Ω_1, а из формулы (23) вытекает, что решение однородной задачи, соответствующей задаче (2), (4) и $u(x, 0) = 0$ не может отличаться от тривиального в области Ω_2. Таким образом, показано, что однородная задача, соответствующая задаче (1), (4), (5) при выполнении условий теоремы 2, имеет только тривиальное решение $u(x, y) \equiv 0$ в области Ω, что говорит о единственности регулярного решения исследуемой задачи 1. $\rhd$

Теорема 3. *Пусть относительно заданных функций $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$; $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\psi(x)$; $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ выполнены условия (24)–(28) и пусть*

$$\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y) \in C[0, h], \tag{38}$$

$$\psi(x) \in C^1[0, r]; \tag{39}$$

$$f_1(x, y) \in C\left(\bar{\Omega}_1\right), \quad f_2(x, y) \in C\left(\bar{\Omega}_2\right). \tag{40}$$

Тогда существует регулярное в области Ω решение задачи 1.

$\lhd$ Для доказательства теоремы 5 вернемся к соотношениям (9), (10) и (31). Исключая из (9) и (31) искомую функцию $\nu(x)$, относительно $\tau(x)$ приходим к задаче нахождения решения обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка вида

$$\tau'''(x) - [a(x)\,\tau(x)]' = F_2(x) - f_2(x, 0), \quad 0 < x < r, \tag{41}$$

удовлетворяющего условиям (10).

Путем трехкратного интегрирования уравнения (41) в пределах от 0 до x, приходим к соответствующему задаче (41), (10) интегральному уравнению

$$\tau(x) + \frac{1}{r}\int\limits_0^r K_1(x, t)\,a(t)\,\tau(t)\,dt = F_3(x), \tag{42}$$

где

$$F_3(x) = \frac{r - x}{2r}\,[2 + xra(0)]\,\varphi_1(0) + \frac{x}{r}\varphi_2(0) + \frac{x(x - r)}{2}\varphi_3(0) - \frac{1}{2r}\int\limits_0^r K_2(x, t)\,[F_2(t) - f_2(t, 0)]\,dt;$$

$$K_j(x, t) = \begin{cases} x(r - t)^j, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ x(r - t)^j - r(x - t)^j, & t \leqslant x \leqslant r, \end{cases} \qquad j = 1, 2.$$

Уравнение (42) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода с ядром $K(x,t) = K_1(x,t)\,a(t) \in C([0,r]\times[0,r])$ и с правой частью $F_3(x) \in C^1[0,r]$. Однозначная разрешимость уравнения (42) при выполнении условий (24)–(28) на функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ следует из доказанной выше теоремы единственности, причем из свойств (38), (39) и (40) следует, что решение $\tau = \tau(x)$ уравнения (42) будет принадлежать классу $\tau(x) \in C[0,r] \cap C^3\,]0,r[$. $\triangleright$

5. Исследование задачи 1 в случае, когда $\left[\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right]' \equiv 0$

Рассмотрим, наконец, случай, когда $a'(x) = \left[\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right]' \equiv 0$ для любого $x \in [0,r]$, т. е.

$$a(x) = \frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)} = a = \mathrm{const} \quad (\forall\, x \in [0,r]). \tag{43}$$

При условии (43) из (41) и (10) приходим к следующей задаче относительно $\tau(x)$:

$$\tau'''(x) - a\tau'(x) = F_2(x) - f_2(x,0)\,, \quad 0 < x < r, \tag{44}$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau(r) = \varphi_2(0), \quad \tau''(0) = \varphi_3(0). \tag{45}$$

Решение задачи (44)–(45) выписывается по формуле

$$\tau(x) = \int\limits_0^r G(x,t)\,[F_2(t) - f_2(t,0)]\,dt + [G_{tt}(x,0) - aG(x,0)]\,\varphi_1(0)$$
$$- [G_{tt}(x,r) - aG(x,r)]\,\varphi_2(0) + G(x,0)\,\varphi_3(0)\,. \tag{46}$$

Функция $G(x,t)$ в формуле (46) есть функция Грина оператора $L[\tau(x)] = \tau'''(x) - a\tau'(x)$ с условиями (45), явный вид которой в зависимости от знака числа a определяется по одной из следующих формул:

$$G(x,t) = \frac{1}{a sh(\sqrt{a}r)}\begin{cases} sh(\sqrt{a}x)\,[1 - ch\sqrt{a}\,(r-t)] - sh(\sqrt{a}r)\,[1 - ch\sqrt{a}\,(x-t)]\,, & 0 \leqslant t < x, \\ sh(\sqrt{a}x)\,[1 - ch\sqrt{a}\,(r-t)]\,, & x < t \leqslant r, \end{cases}$$

когда $a > 0$;

$$G(x,t) = \frac{1}{2r}\begin{cases} (r-x)\left(t^2 - rx\right), & 0 \leqslant x < t, \\ -x\,(r-t)^2\,, & t < x \leqslant r, \end{cases}$$

при $a = 0$; и

$$G(x,t) = \frac{1}{a\sin\left(\sqrt{-a}r\right)}$$
$$\times\begin{cases} \sin\left(\sqrt{-a}x\right)\left[1 - \cos\sqrt{-a}\,(r-t)\right] - \sin\left(\sqrt{-a}r\right)\left[1 - \cos\sqrt{-a}\,(x-t)\right], & 0 \leqslant t < x, \\ \sin\left(\sqrt{-a}x\right)\left[1 - \cos\sqrt{-a}\,(r-t)\right], & x < t \leqslant r, \end{cases}$$

когда $a < 0$ и $r \neq \frac{\pi n}{\sqrt{-a}}$, $n \in N$.

В каждом из рассмотренных выше случаев, по найденному значению $\tau(x)$ из фундаментальных соотношений (9) или (31) можно найти и функцию $\nu(x)$. При этом решение исходной задачи (1), (4), (5) в области Ω_1 выписывается по формуле Даламбера (12), а в области Ω_2 решение задачи (3), (4) при заданном $u(x,0) = \tau(x)$ дается по формуле (23).

Если число r таково, что $r = \frac{\pi n}{\sqrt{-a}}$, $n \in \mathbb{N}$, в случае, когда $a < 0$, то однородная задача, соответствующая задаче (44)–(45), будет обладать ненулевыми решениями вида $\tau(x) = c\sin\left(\sqrt{-a}x\right)$, $c = \mathrm{const}$. Функция $G(x,t)$ в этом случае не существует, а решение задачи (44)–(45) будет существовать только при дополнительном требовании

$$\int\limits_0^r \left[F_2(t) - f_2(t,0)\right]\left[\cos\sqrt{-a}\,(r-t) - 1\right] dt = a\varphi_2(0). \tag{47}$$

При выполнении условия (47), решение задачи 1 в области Ω_1 выписывается по формуле

$$u(x,y) = \frac{g(x+y)+g(x-y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^y\int\limits_{x-y+s}^{x+y-s} f_1(t,s)\,dtds,$$

а в области Ω_2 решение задачи 1 будет иметь вид

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\left\{\int\limits_0^y G_{\xi\xi}(x,y;0,\eta)\,\varphi_1(\eta)\,d\eta - \int\limits_0^y G_{\xi\xi}(x,y;r,\eta)\,\varphi_2(\eta)\,d\eta\right.$$
$$\left.+\int\limits_0^y G(x,y;0,\eta)\,\varphi_3(\eta)\,d\eta + \int\limits_0^r G(x,y;\xi,0)\,g(\xi)\,d\xi - \int\limits_0^y\int\limits_0^r G(x,y;\xi,\eta)\,f_2(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\right\},$$

где $g(x)$ — произвольная, достаточно гладкая функция, а $G(x,y;\xi,\eta) = U(x,y;\xi,\eta) - W(x,y;\xi,\eta)$, как и выше, — функция Грина оператора $Lu = u_{xxx} - u_y$; $U(x,y;\xi,\eta)$ и $W(x,y;\xi,\eta)$ — фундаментальные решения уравнения (2) [1, с. 135].

Из вышесказанного следует, что *характеристики AC и BC, ограничивающие гиперболическую часть Ω_1 области Ω не являются равноправными как носители данных задачи* 1 *при $r = \pi n$, $n \in \mathbb{N}$, и из разрешимости задачи* 1 *с данными на характеристике BC в этом случае, вообще говоря, не следует разрешимость задачи* 1 *с данными на характеристике AC.*

Литература

1. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.—Ташкент: ФАН, 1979.—239 с.
2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.: Высшая школа, 1995.—301 с.
3. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных.—М.: Наука, 2006.—287 с.
4. *Жегалов В. И.* Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на линии перехода // Ученые зап. Казанского ун-та.—1962.—Т. 122, кн. 3.—С. 3–16.
5. *Нахушев А. М.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Диф. уравнения.—1969.—Т. 5, № 1.—С. 44–59.
6. *Нахушев А. М.* Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Докл. АН СССР.—1969.—Т. 187, № 4.—С. 736–739.
7. *Нахушев А. М.* О задаче Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений // Диф. уравнения.—1971.—Т. 7, № 1.—С. 49–56.
8. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961.—208 с.
9. *Франкль Ф. И.* Избранные труды по газовой динамике.—М.: Наука, 1973.—712 с.
10. *Салахитдинов М. С.* Уравнения смешанно-составного типа.—Ташкент: ФАН, 1974.—156 с.

11. *Репин О. А.* Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типа.—Самара: Изд-во Самарского филиала Саратовского гос. ун-та, 1992.—161 с.
12. *Кальменов Т. Ш.* Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа.—Шымкент: Гылая, 1993.—328 с.
13. *Жегалов В. И., Миронов А. Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.—Казань: Казанское матем. об-во, 2001.—226 с.
14. *Репин О. А., Килбас А. А., Маричев О. И.* Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами.—Самара: Изд-во Самарского гос. эконом. ун-та, 2008.—275 с.
15. *Пулькина Л. С.* Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений.—Самара: Изд-во Самарского ун-та, 2012.—194 с.
16. *Сабитов К. Б.* К теории уравнений смешанного типа.—М.: Физматлит, 2014.—304 с.
17. *Сабитов К. Б.* Прямые и обратные задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.—Уфа: Гилем, 2015.—240 с.
18. *Нахушева З. А.* Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений.—Нальчик: КБНЦ РАН, 2011.—196 с.
19. *Езаова А. Г., Лесев В. Н., Кожанов А. И.* Нелокальная задача с дробными производными для уравнения третьего порядка // Мат. заметки СВФУ.—2019.—Т. 26, № 1.—С. 14–22. DOI: 10.25587/SVFU.2019.101.27243.
20. *Балкизов Ж. А.* Краевая задача со смещением для модельного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.—2018, № 3 (23).—С. 19–26. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-19-26.
21. *Балкизов Ж. А.* Об одной краевой задаче типа задачи Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка с тремя смещениями в гиперболической части области // Науч. ведомости Белгородского гос. ун-та. Сер. Математика. Физика.—2019.—Т. 51, № 1.—С. 5–14. DOI: 10.18413/2075-4639-2019-51-1-5-14.
22. *Balkizov Zh.* A. On a boundary value problem for a third-order parabolic-hyperbolic type equation with a displacement boundary condition in its hyperbolicity domain // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки.—2020.—Т. 24, № 2.—С. 211–225. DOI: 10.14498/vsgtu1694.
23. *Балкизов Ж. А.* Первая краевая задача со смещением для уравнения параболо-гиперболического типа второго порядка // Вестн. Дагестанского гос. ун-та. Сер. 1. Естеств. науки.—2020.—Т. 35, № 1.—С. 13–20. DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-1-13-20.
24. *Езаова А. Г.* Однозначная разрешимость одной задачи типа задачи Бицадзе — Самарского для уравнения с разрывными коэффициентами // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 4.—С. 50–58. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23387.
25. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1977.—736 с.

Статья поступила 12 января 2021 г.

Балкизов Жираслан Анатольевич
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела уравнений смешанного типа
РОССИЯ, 360005, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а
E-mail: giraslan@yandex.ru

Езаова Алена Георгиевна
Институт физики и математики КБГУ,
доцент кафедры алгебры и дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 360005, Нальчик, ул. Чернышевского, 175
E-mail: alena_ezaova@mail.ru

Канукоева Ляна Владимировна
Институт физики и математики КБГУ,
доцент кафедры алгебры и дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 360005, Нальчик, ул. Чернышевского, 175
E-mail: armand97a@gmail.com

Vladikavkaz Mathematical Journal
2021, Volume 23, Issue 2, P. 5–18

BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH DISPLACEMENT FOR A THIRD-ORDER PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION

Balkizov, Zh. A.[1], Ezaova, A. G.[2] and Kanukoeva, L. V.[2]

[1] Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 a Shortanova St., Nalchik 360005, Russia;
[2] Institute of Physics and Mathematics KBSU,
175 Chernyshevsky St., Nalchik 360005, Russia

E-mail: giraslan@yandex.ru, alena_ezaova@mail.ru, armand97a@gmail.com

Abstract. A boundary value problem with a shift is investigated for an inhomogeneous third order equation of parabolic-hyperbolic type when one of the boundary conditions is a linear combination of values of the sought function on independent characteristics. The following results are obtained in this work: the inequality of the characteristics AC and BC, which bound the hyperbolic part Ω_1 of the domain Ω, as carriers of the data of the Tricomi problem for $0 \leqslant x \leqslant \pi n$, $n \in N$ and the solvability of the Tricomi problem with data on the characteristic BC in this case, in general, does not imply the solvability of the Tricomi problem with data on the characteristic AC; necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of a regular solution of the problem are found. Under certain requirements for given functions, the solution to the problem is written out explicitly. It is shown that if the necessary conditions for the given functions found in the work are violated, the homogeneous problem corresponding to the problem has an infinite set of linearly independent solutions, and the set of solutions to the corresponding inhomogeneous problem can exist only with an additional requirement for the given functions.

Key words: parabolic-hyperbolic equation, third-order equation with multiple characteristics, inhomosgeneous wave equation, Tricomi problem, problem with displacement, Tricomi method, Green's function method, integral equations method.

Mathematical Subject Classification (2010): 35M12, 35M32.

For citation: *Balkizov, Zh. A., Ezaova, A. G. and Kanukoeva, L. V.* Boundary Value Problem with Displacement for a Third-Order Parabolic-Hyperbolic Equation, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 23, no. 2, pp. 5–18 (in Russian). DOI: 10.46698/d3710-0726-7542-i.

References

1. *Dzhuraev, T. D. Kraevye zadachi dlya uravnenij smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov* [Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed Composite Types], Tashkent, FAN, 1979, 239 p. (in Russian).
2. *Nakhushev, A. M. Uravneniya matematicheskoj biologii* [Equations of Mathematical Biology], Moscow, Higher School, 1995, 301 p.
3. *Nakhushev, A. M. Zadachi so smeshcheniem dlya uravnenij v chastnyh proizvodnyh* [Bias Problems for Partial Differential Equations], Moscow, Nauka, 2006, 287 p.
4. *Zhegalov, V. I.* Boundary Value Problem for a Mixed-Type Equation with Boundary Conditions on Both Characteristics and with Discontinuities on the Transition Line, *Scientific Notes of Kazan State University*, 1962, vol. 122, book 3, pp. 3–16 (in Russian).
5. *Nakhushev, A. M.* Certain Boundary Value Problems for Hyperbolic Equations and Equations of Mixed Type, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1969, vol. 5, no. 1, pp. 44–59 (in Russian).
6. *Nakhushev, A. M.* A New Boundary Value Problem for a Certain Degenerate Hyperbolic Equation, *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1969, vol. 187, no. 4, pp. 736–739 (in Russian).
7. *Nakhushev, A. M.* The Darboux Problem for Degenerate Hyperbolic Equations, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1971, vol. 7, no. 1, pp. 49–56 (in Russian).
8. *Bers, L. Matematicheskie voprosy dozvukovoj i okolozvukovoj gazovoj dinamiki* [Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics], Moscow, Izdat. Inostr. Lit., 1961. 208 p. (in Russian).

9. *Frankl, F. I. Izbrannye trudy po gazovoj dinamike* [Selected Works on Gas Dynamics], Moscow, Nauka, 1973, 712 p. (in Russian).
10. *Salakhitdinov, M. S. Uravneniya smeshanno-sostavnogo tipa* [Equations of the Mixed-Composite Type], Tashkent, FAN, 1974, 156 p. (in Russian).
11. *Repin, O. A. Kraevye zadachi so smeshcheniem dlya uravnenij giperbolicheskogo i smeshannogo tipa* [Boundary-Value Problems With a Shift for Hyperbolic and Mixed Equations], Samara, Saratov Univ. Press, 1992, 161 p. (in Russian).
12. *Kalmenov, T. Sh. Kraevye zadachi dlya linejnyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh giperbolicheskogo tipa* [Boundary-Value Problems for Linear Partial Differential Equations of Hyperbolic Type], Shymkent, Gylaya, 1993, 328 p. (in Russian).
13. *Zhegalov, V. I. and Mironov, A. N. Differencial'nye uravneniya so starshimi chastnymi proizvodnymi* [Differential Equations with Higher Partial Derivatives], Kazan, Kazanskoe Matematicheskoe Obshhestvo, 2001, 226 p. (in Russian).
14. *Repin, O. A., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. Kraevye zadachi dlya uravnenij v chastnyh proizvodnyh s razryvnymi koefficientami* [Boundary Value Problems for Partial Differential Equations with Discontinuous Coefficients], Samara, Saratov Univ. Press, 2008, 275 p. (in Russian).
15. *Pulkina, L. S. Zadachi s neklassicheskimi usloviyami dlya giperbolicheskih uravnenij* [Problems with Non-Classical Conditions for Hyperbolic Equations], Samara, Samara Univ. Press, 2012, 194 p. (in Russian).
16. *Sabitov, K. B. K teorii uravnenij smeshannogo tipa* [On the Theory of Equations of Mixed Type], Moscow, Fizmatlit, 2014, 304 p. (in Russian).
17. *Sabitov, K. B. Pryamye i obratnye zadachi dlya uravnenij parabolo-giperbolicheskogo tipa* [Direct and Inverse Problems for Parabolic-Hyperbolic Equations], Ufa, Gilem, 2015, 240 p. (in Russian).
18. *Nakhusheva, Z. A. Nelokal'nye kraevye zadachi dlya osnovnyh i smeshannogo tipov differencial'nyh uravnenij* [Nonlocal Boundary Value Problems for Basic and Mixed Types of Differential Equations], Nalchik, KBNTs RAN, 2011, 196 p. (in Russian).
19. *Ezaova, A. G., Lesev, V. N. and Kozhanov, A. I.* A Nonlocal Problem with Fractional Derivatives for Third-Order Equations, *Mathematical Notes of NEFU*, 2019, vol. 26, no. 1. pp. 14–22 (in Russian). DOI: 10.25587/SVFU.2019.101.27243.
20. *Balkizov, Zh. A.* Boundary Value Problem with Displacement for a Model Equation of Parabolic-Hyperbolic Type of the Third Order, *Bulletin KRASEC. Physical & Mathematical Sciences*, 2018, no. 3 (23), pp. 19–26 (in Russian). DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-19-26.
21. *Balkizov, Zh. A.* On One Boundary Value Problem of the Tricomi Problem Type for an Equation of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type of the Second Order with Three Displacements in the Hyperbolic Part of the Domain, *Scientific Bulletin of Belgorod State University. Series Mathematics. Physics*, 2019, vol. 51, no. 1, pp. 5–14 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-5-14.
22. *Balkizov, Zh. A.* On a Boundary Value Problem for a Third-Order Parabolic-Hyperbolic Type Equation with a Displacement Boundary Condition in its Hyperbolicity Domain, *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Ser. Fiziko-Matematicheskie Nauki* [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 211–225. DOI:10.14498/vsgtu1694.
23. *Balkizov, Zh. A.* The First Boundary Value Problem with Displacement for a Second-Order Parabolic-Hyperbolic Equation, *Herald of Dagestan State University. Ser. 1. Natural Sciences*, 2020, vol. 35, no. 1, pp. 13–20 (in Russian). DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-1-13-20.
24. *Ezaova, A. G.* Unique Solvability of a Problem Like the Bitsadze–Samarskii Problem for an Equation with Discontinuous Coefficients *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2018, vol. 20, no. 4, pp. 50–58 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23387.
25. *Tikhonov, A. N. and Samarskiy, A. A. Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Moscow, Nauka, 1977, 736 p. (in Russian).

Received January 12, 2021

Zhiraslan A. Balkizov
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 a Shortanova St., Nalchik 360005, Russia,
Leading Researcher of the Department of Mixed Type Equations
E-mail: giraslan@yandex.ru

Alena G. Ezaova
Institute of Physics and Mathematics KBSU,
175 Chernyshevsky St., Nalchik 360005, Russia,
Associate Professor of the Department of Algebra and Differential Equations
E-mail: alena_ezaova@mail.ru

Liana V. Kanukoeva
Institute of Physics and Mathematics KBSU,
175 Chernyshevsky St., Nalchik 360005, Russia,
Associate Professor of the Department of Algebra and Differential Equations
E-mail: armand97a@gmail.com