

# ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

<http://www.vlmj.ru>

Том 21, выпуск 2

2019



# VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

<http://www.vlmj.ru>

Volume 21, Issue 2

2019

**Главный редактор**

А. Г. КУСПАЕВ

Владикавказский научный центр РАН, Владикавказ, Россия

**Ответственный секретарь**

Е. К. БАСАЕВА

Южный математический институт — филиал ВЦ РАН,  
Владикавказ, Россия

**Редакционная коллегия**

А. В. АБАНИН

Южный федеральный университет,  
Ростов-на-Дону, Россия

ХОСЕ БОНЕТ

Политехнический университет,  
Валенсия, Испания

Н. А. ВАВИЛОВ

Санкт-Петербургский государственный  
университет, Санкт-Петербург, Россия

А. О. ВАТУЛЬЯН

Южный федеральный университет,  
Ростов-на-Дону, Россия

С. К. ВОДОПЬЯНОВ

Институт математики Сибирского  
отделения РАН, Новосибирск, Россия

Е. И. ГОРДОН

Университет Восточного Иллинойса,  
Чарльстон, США

А. И. КОЖАНОВ

Институт математики Сибирского  
отделения РАН, Новосибирск, Россия

В. А. КОЙБАЕВ

Северо-Осетинский государственный  
университет им. К. Л. Хетагурова,  
Владикавказ, Россия

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК

Южный математический  
институт — филиал ВЦ РАН,  
Владикавказ, Россия

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

Институт математики Сибирского  
отделения РАН, Новосибирск, Россия

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ

Московский государственный  
университет им. М. В. Ломоносова,  
Москва, Россия

В. Д. МАЗУРОВ

Институт математики Сибирского  
отделения РАН, Новосибирск, Россия

С. Г. САМКО

Южный федеральный университет,  
Ростов-на-Дону, Россия;  
Университет Алгарве, Фаро,  
Португалия

ФАМ ЧОНГ ТИЕН

Вьетнамский национальный  
университет, Ханой, Вьетнам

В. Г. ТРОИЦКИЙ

Альбертский университет,  
Эдмонтон, Канада

ЛЕ ХАЙ ХОЙ

Наньянский технологический  
университет, Сингапур

А. Б. ШАБАТ

Институт теоретической физики  
им. Л. Д. Ландау РАН,  
Черноголовка, Россия

**Адрес редакции:** 362027, Владикавказ, Маркуса, 22

Телефон: (8672) 50-18-06; E-mail: rio@smath.ru

**Зав. редакцией:** В. В. БОЗРОВА

Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год

ЭЛЕКТРОННАЯ ВЕРСИЯ: [www.vlmj.ru](http://www.vlmj.ru)

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций:

свид. ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.;

свид. ЭЛ № ФС77-70171 от 21 июня 2017 г.

© Владикавказский научный центр РАН, 2019

**Editor-in-Chief**

ANATOLY G. KUSRAEV  
Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences,  
Vladikavkaz, Russia

**Editorial Executive Secretary**

ELENA K. BASAEVA  
Southern Mathematical Institute of VSC RAS,  
Vladikavkaz, Russia

**Editorial Board**

ALEXANDER V. ABANIN  
Southern Federal University,  
Rostov-on-Don, Russia

JOSÉ BONET  
Universitat Politècnica de València,  
Valencia, Spain

EVGENY I. GORDON  
Eastern Illinois University, Charleston, USA

LE HAI KHOI  
Nanyang Technological University, Singapore

VLADIMIR A. KOIBAEV  
North Ossetian State University,  
Vladikavkaz, Russia

YURII F. KOROBAYNIK  
Southern Mathematical  
Institute VSC RAS,  
Vladikavkaz, Russia

ALEXANDER I. KOZHANOV  
Sobolev Institute of Mathematics  
of Siberian Branch of the RAS,  
Novosibirsk, Russia

SEMEN S. KUTATELADZE  
Sobolev Institute of Mathematics  
of Siberian Branch of the RAS,  
Novosibirsk, Russia

GEORGII G. MAGARIL-IL'YAEV  
Lomonosov Moscow State University,  
Moscow, Russia

VICTOR D. MAZUROV  
Sobolev Institute of Mathematics  
of Siberian Branch of the RAS,  
Novosibirsk, Russia

STEFAN G. SAMKO  
Universidade do Algarve,  
Faro, Portugal;  
Southern Federal University,  
Rostov-on-Don, Russia

ALEXEY B. SHABAT  
Landau Institute for Theoretical  
Physics, Chernogolovka, Russia

PHAM TRONG TIEN  
Vietnam National University,  
Hanoi, Vietnam

VLADIMIR G. TROITSKY  
University of Alberta,  
Edmonton, Canada

ALEXANDER O. VATULYAN  
Southern Federal University,  
Rostov-on-Don, Russia

NIKOLAI A. VAVILOV  
Saint Petersburg State University,  
Saint Petersburg, Russia

SERGEI K. VODOPYANOV  
Sobolev Institute of Mathematics  
of Siberian Branch of the RAS,  
Novosibirsk, Russia

**Editorial Office:** 22 Markusa St., Vladikavkaz 362027,  
the Republic of North Ossetia-Alania, Russia  
Phone: (8672) 50-18-06; E-mail: [rio@smath.ru](mailto:rio@smath.ru)  
**Managing editor:** V. V. BOZROVA

The journal was founded in 1999. It is published four times a year.  
ELECTRONIC VERSION: [www.vlmj.ru](http://www.vlmj.ru)

Registered with the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom,  
Information Technologies and Mass Communications:  
ПН № ФС77-70008 dated May 31, 2017; ЭЛ № ФС77-70171 dated June 21, 2017.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР  
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 21, выпуск 2

апрель–июнь, 2019

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Ильин К. И., Моргулис А. Б.</b> Вибротечения вязкой несжимаемой жидкости при высоких числах Рейнольдса .....	5
<b>Madhusudhan K. V., Reddy P. S. K., Rajanna K. R.</b> Randic Type Additive Connectivity Energy of a Graph .....	18
<b>Махнев А. А., Токбаева А. А.</b> О дистанционно регулярном графе с массивом пересечений $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ .....	27
<b>Митрохин С. И.</b> Об исследовании спектра функционально-дифференциального оператора с суммируемым потенциалом .....	38
<b>Тотиева Ж. Д.</b> К вопросу исследования задачи определения матричного ядра системы уравнений анизотропной вязкоупругости .....	58
<b>Юлдашев Т. К.</b> Определение коэффициента в нелокальной задаче для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром .....	67

Владикавказ  
2019

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES  
VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTER  
SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

# VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

---

Volume 21, issue 2

April–June, 2019

---

## CONTENT

<b>Ilin, K. I., Morgulis, A. B.</b> Vibrational Flows of Viscous Incompressible Fluids for High Reynolds Numbers .....	5
<b>Madhusudhan, K. V., Reddy, P. S. K. and Rajanna, K. R.</b> Randic Type Additive Connectivity Energy of a Graph .....	18
<b>Makhnev, A. A. and Tokbaeva, A. A.</b> On a Distance-Regular Graph with an Intersection Array $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ .....	27
<b>Mitrokhin, S. I.</b> On the Study of the Spectrum of a Functional-Differential Operator with a Summable Potential .....	38
<b>Totieva, Zh. D.</b> The Problem of Determining the Matrix Kernel of the Anisotropic Viscoelasticity Equations System .....	58
<b>Yuldashev, T. K.</b> A Coefficient Determination in Nonlocal Problem for Boussinesq Type Integro-Differential Equation with Degenerate Kernel .....	67

Vladikavkaz  
2019

УДК 51-72

DOI 10.23671/VNC.2019.2.32112

## ВИБРОТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ВЫСОКИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

К. И. Ильин<sup>1</sup>, А. Б. Моргулис<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Йоркский университет,

Великобритания, Хеслингтон, Йорк YO10 5DD;

<sup>2</sup> Южный математический институт — филиал ВНИЦ РАН,

Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

<sup>3</sup> Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича ЮФУ,

Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а

E-mail: konstantin.ilin@york.ac.uk, morgulisandrey@gmail.com

**Аннотация.** В статье приведена высокочастотная асимптотика системы Навье — Стокса, описывающей движение вязкой несжимаемой жидкости в области, ограниченной вибрирующей поверхностью. Граничные условия требуют совпадения векторов скоростей материальной частицы жидкости и той точки границы, в которой частица находится; тем самым исключается как скольжение жидкости вдоль границы (условие прилипания), так и протекание первой через вторую. Предполагается, что движение граничной поверхности задано и периодически по времени, причем ограниченная ею область в среднем покоится, но может, вообще говоря, изменять форму. Частота колебаний границы стремится к бесконечности, а амплитуда — к нулю, но отношение амплитуды к толщине стоксова слоя остается величиной порядка единицы. Основной результат — явный вид уравнений и граничных условий, определяющих среднее течение в самом общем случае, без специальных предположений о данных задачи. На этой основе исследован ряд конкретных течений, в частности, течение в круглой трубе, вызываемое нормальной вибрацией ее стенок.

**Ключевые слова:** система Навье — Стокса, высокочастотная асимптотика, вибрация, среднее течение.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 76D05, 76D10, 76D17, 35Q30, 35Q35.

**Образец цитирования:** Ильин К. И., Моргулис А. Б. Вибротечения вязкой несжимаемой жидкости

при высоких числах Рейнольдса // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 2.—С. 5–17. DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32112.

### 1. Вибротечения и дрейф Стокса

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой и однородной жидкости в контейнере, вызываемое заданным периодическим движением его стенок. Сам контейнер меняет, вообще говоря, свою форму, но в среднем покоится. Характерные масштабы такого течения: усредненный размер контейнера  $L$ , амплитуда колебаний стенок контейнера  $A$ , соответствующая частота  $\Omega$ . Примем  $L$  за масштаб длины,  $\Omega^{-1}$  — за масштаб времени,  $U = A\Omega$  — за масштаб скорости, и  $\rho AL\Omega^2$  — за масштаб давления (где через  $\rho = \text{const}$

обозначена плотность жидкости). Кроме того, все данные задачи (1)–(2) считаем  $2\pi$ -периодическими по  $\tau$ , и разыскиваем  $2\pi$ -периодические по  $\tau$  решения. При указанной нормировке безразмерная форма системы Навье — Стокса выглядит так:

$$\mathbf{v}_\tau + \delta(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \epsilon^2 \Delta \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ in } D(\tau); \quad (1)$$

$$\mathbf{v}(\bar{x} + \delta \tilde{Y}, \tau) = \tilde{Y}_\tau, \quad \bar{x} \in \bar{S}. \quad (2)$$

Здесь  $\tau = \Omega t$ ,  $\delta = A/L$ ,  $\epsilon^2 = \nu/(\Omega L^2)$ , и  $\nu$  — вязкость жидкости. Далее, через  $D(\tau)$  обозначена область, занятая жидкостью в момент времени  $\tau$ ,  $\tilde{Y} = \tilde{Y}(\bar{x}, \tau, \delta)$  — текущее смещение точки  $\bar{x} \in \bar{S}$ ,  $\bar{S} = \partial \bar{D}$ , и  $\bar{D}$  — отсчетная область, которую мы считаем заданной и постоянной.

Введем число Рейнольдса  $Re = (LU)/\nu = LA\Omega/\nu = \delta/\epsilon^2$ . Формально устремив  $\epsilon \rightarrow +0$  и  $\delta \rightarrow +0$ , получим линеаризованные уравнения Эйлера с «лишним» граничным условием:

$$\mathbf{v}_\tau = -\nabla p, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \text{ в } \bar{D}, \quad \mathbf{v} = \tilde{Y}_\tau|_{\delta=0} \text{ на } \bar{S}. \quad (3)$$

Эта система не имеет, вообще говоря, решения. Если же ограничиться лишь нормальной проекцией граничного условия (3), то решение легко найти, полагая  $\mathbf{v} = \nabla \Phi$ . Чтобы удовлетворить граничное условие, к найденному полю придется прибавить погранслоиную поправку. Следовательно, в главном приближении мы получим безвихревое ( $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ ) течение в «теле» жидкости, а завихренность, создаваемая вязким трением о стенку, сосредоточится в узком слое вблизи стенки (стоксов слой). Толщина стоксова слоя — порядка  $\epsilon$ . Однако в старших приближениях появляется *глобальное* среднее вихревое течение (в англоязычной литературе известно как *steady streaming*).

Несмотря на относительную малость скорости, глобальное среднее течение может повлиять на процесс перемешивания масс жидкости на больших временах. В самом деле, рассмотрим уравнение (безразмерное) движения частиц жидкости

$$dx/dT = \delta^{-1} \mathbf{v}(x, \tau, \delta),$$

где  $T = \delta^2 \tau$  — «медленное» время. Пусть поле  $\mathbf{v}$  периодически по  $\tau$  с периодом  $2\pi$ ,

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}(x, \tau) + \delta(\bar{\mathbf{v}}(x) + \tilde{\mathbf{v}}_1(x, \tau)) + O(\delta^2), \quad \delta \rightarrow 0,$$

$\bar{\mathbf{v}}(x)$  — среднее поле, а члены, отмеченные тильдой, имеют нулевое среднее за период. Тогда

$$x = \bar{x}(T) + \delta(\bar{x}_1(T) + \tilde{x}(\tau, T)) + O(\delta^2), \quad \delta \rightarrow 0,$$

$$d\bar{x}/dT = \bar{\mathbf{v}}(x) + [\bar{\tilde{\mathbf{v}}}, \tilde{\mathbf{w}}]/2, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{w}}_\tau,$$

где квадратные скобки обозначают стандартный коммутатор векторных полей. Вообще говоря, оба слагаемых в выражении  $d\bar{x}/dT$  имеют ненулевой  $\text{rot}$ . Вторая из них известна как поправка или дрейф Стокса. Течение жидкости с полем скорости  $\bar{\mathbf{v}}(x) + [\bar{\tilde{\mathbf{v}}}, \tilde{\mathbf{w}}]/2$  назовем *эффективным вибротечением*.

Имеются различные теории эффективного вибротечения. Различия, главным образом, заключаются в предположении о числе Рейнольдса вибротечения (the streaming Reynolds number)

$$Re_s = (\Omega A^2)/\nu = \delta^2/\epsilon^2.$$

На самом деле,  $\sqrt{Re_s}$  не что иное, как отношение характерной амплитуды вибрации границы к толщине слоя Стокса. Мы предполагаем, что они одного порядка, так что

$$\delta \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \sqrt{Re_s} = \delta/\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \beta \equiv \text{const} \sim 1, \quad Re = \beta\epsilon^{-1} \rightarrow \infty. \quad (4)$$



Различные конкретные течения с таким соотношением масштабов на физическом уровне строгости рассматривали Craik и Leibovich [1], Duck и Smith [2], Haddon и Riley [3], Gopinath [4]. Наш подход, более общий и формальный, основан на методе Вишика — Люстерника. Левенштам [5] использовал близкий подход в случае неподвижных границ и вибрирующей массовой силы, и дал строгое обоснование полученной асимптотике. Владимиров [6], а затем Ильин и Моргулис [7], применяли технику Вишика — Люстерника непосредственно к течениям с вибрирующими границами. При этом, однако, рассматривались специальные классы течений. Асимптотическое решение общей задачи (1), насколько нам известно, в литературе не излагалось. Данная работа восполняет этот пробел и наш анализ приводит к универсальному описанию эффективного вибротечения без каких-либо дополнительных предположений о данных задачи (1), кроме оценки (4). На этой основе мы рассматриваем ряд конкретных вибротечений.

Весьма детальный обзор результатов, относящихся к масштабам (4), а также обсуждение преимуществ техники Вишика — Люстерника по сравнению с другими подходами, приведены в статье [7]. О течениях с соотношениями масштабов, отличными от (4), см. в обзоре Riley [8], а также работы Longuet-Higgins [9, 10], где (на физическом уровне строгости) рассмотрен наиболее трудный случай  $Re_s \gg 1$ .

## 2. Уравнения вибротечения

Начнем со вспомогательных определений. Напомним ортогональное (в смысле метрики кинетической энергии) разложение векторного поля  $\mathbf{a}$ , заданного на области  $\bar{D}$ :  $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \nabla\chi$ , где  $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$  и  $\mathbf{b} \parallel \bar{S}$ . Обозначим  $\Pi, \Pi'$  проекторы, ассоциированные с указанным разложением:  $\Pi : \mathbf{a} \mapsto \nabla\chi$ ,  $\Pi' : \mathbf{a} \mapsto \mathbf{b}$ . Ротор поля  $\mathbf{a}$  обозначаем  $\nabla \times \mathbf{a}$ , а также  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ , дивергенцию —  $\nabla \cdot \mathbf{a}$ , а также  $\operatorname{div} \mathbf{a}$ .

Пусть  $g = g(\tau) — 2\pi$ -периодическая векторнозначная функция. Имеет место разложение

$$g = \tilde{g} + \bar{g}, \quad \bar{g} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) d\tau.$$

Очевидно,  $\tilde{\bar{g}} = \bar{\tilde{g}} = 0$ . В дальнейшем изложении черта сверху обозначает усреднение, а тильда — члены с нулевым средним. Через

$$\partial_\tau^{-1} : g \mapsto f, \quad \partial_\tau f = g$$

обозначаем правый обратный к оператору дифференцирования, действующий на подпространстве функций  $g : \bar{g} = 0$ .

Пусть  $a$  — формальный степенной ряд по положительным степеням некоторой переменной с векторными коэффициентами. Через  ${}_m a$  обозначим формальный многочлен порядка  $m$ , полученный урезанием этого ряда. Если  $b, c, \dots$  такие полиномы, то  $\operatorname{op}(b, c, \dots)$  — многочлен, представляющий собой алгебраическое выражение от многочленов  $b, c, \dots$

Пусть  $\epsilon \rightarrow +0$  и при этом выполняется условие (4). Соответствующее асимптотическое разложение решения  $\mathbf{v}$ ,  $p$  системы (1) ищем в виде

$$\mathbf{v}(x, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \left( \mathbf{v}^i(x, \tau) + \mathbf{v}^b(x, \tau, \eta) \right),$$

$$p(x, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \left( p_k^a(x, \tau) + p_k^b(x, \tau, \eta) \right),$$

$$\eta = \rho/\epsilon, \quad (\mathbf{v}_k^b, p_k^b)(\cdot, \eta) = o(\eta^{-n}), \quad \eta \rightarrow \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

где  $\rho$  — некоторая координата вблизи поверхности  $\bar{S}$ , трансверсальная к ней (например, расстояние до  $\bar{S}$ ). Таким образом, верхний индекс  $i$  ( $b$ ) отмечает члены внутреннего (погранслоного) разложения, предназначенного для описания течения в толще жидкости (в пристенном слое Стокса). Отметим, что результат не зависит от выбора координаты  $\rho$ .

Подстановка указанных разложений в систему (1) дает цепь уравнений для коэффициентов внутреннего разложения

$$\partial_\tau \mathbf{v}_k^i = -\nabla p_k^i + \mathbf{f}_k, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_k^i = 0 \text{ в } \bar{D}, \quad \bar{\mathbf{v}}_k^i \cdot \bar{\mathbf{n}} = \gamma_k \text{ на } \bar{S}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где  $\mathbf{f}_k = \operatorname{op}({}_{k-1}\mathbf{v}^i)$ ,  $\gamma_k = \operatorname{op}({}_{k-1}\mathbf{v}^b, {}_{k-1}\mathbf{v}^i, {}_k\tilde{Y})$  и  $\bar{\mathbf{n}}$  обозначает поле *внутренней нормали* на  $\bar{S}$ . Периодическое по  $\tau$  решение  $(\mathbf{v}_k^i, p_k^i)$  существует при условии  $\Pi' \mathbf{f}_k = 0$ , а в противном случае — не существует. В случае существования, решение определено с точностью до средних полей  $\bar{\mathbf{v}}_k^i, \bar{p}_k^i$ . Уравнения относительно среднего поля следуют из условий разрешимости последующих уравнений в цепи (5).

Обратимся к деталям. Полагаем

$$\mathbf{N}\tilde{\gamma} \stackrel{def}{=} \nabla \phi: \quad \Delta \phi = 0 \text{ в } \bar{D}, \quad \bar{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi = \tilde{\gamma} \text{ на } S.$$

Запускаем итерационный процесс, полагая  $\mathbf{f}_0 = 0$ ,  $\tilde{\gamma}_0 = \bar{\mathbf{n}} \cdot \tilde{Y}_{0\tau}$ ,  $\tilde{Y}_0 = \tilde{Y}(x, \tau, 0)$  и  $\tilde{\gamma}_0 = 0$ . Последнее равенство имеет место, поскольку в среднем область покоится. Тогда

$$\mathbf{v}_0^i = \bar{\mathbf{v}}_0^i + \mathbf{N}\tilde{\gamma}_0, \quad \nabla \bar{p}_0^i = -\partial_\tau \mathbf{N}\tilde{\gamma}_0.$$

Далее, решаем уравнения (5) при  $k = 1$ . Возникает условие разрешимости

$$\Pi'(\bar{\mathbf{v}}_0^i, \nabla)\bar{\mathbf{v}}_0^i = 0, \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}_0^i = 0 \text{ в } \bar{D}. \quad (6)$$

Таким образом, получены уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости. Ниже, в разделе 3, мы увидим, что эти уравнения следует решать с условием  $\bar{\mathbf{v}}_0^i = 0$  на  $\bar{S}$ . Получившаяся краевая задача имеет тривиальное решение  $\bar{\mathbf{v}}_0^i \equiv 0$ . Нетривиальные решения также существуют, но мы не обсуждаем здесь эту возможность.

Главные члены, описывающие глобальное среднее течение:  $\bar{\mathbf{v}}_1^i, \bar{p}_1^i$ . Уравнения относительно этих полей получаются из условий разрешимости уравнения (5) при  $k = 3$ , так как при  $k = 2$  условие разрешимости не возникает. Итак, в главном приближении глобальное среднее течение описывают уравнения

$$\Delta \bar{\mathbf{v}}_1^i - \nabla H_1 = \beta \bar{\boldsymbol{\omega}}_1^i \times \mathbf{V}; \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}_1^i = 0; \quad \bar{\boldsymbol{\omega}}_1^i = \nabla \times \bar{\mathbf{v}}_1^i; \quad (7)$$

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{v}}_1^i + \beta [\overline{\boldsymbol{\xi}_\tau}, \bar{\boldsymbol{\xi}}]/2, \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{N}(\partial_\tau^{-1} \tilde{\gamma}_0). \quad (8)$$

Отсюда видно, что за перенос вихря отвечает поле  $\mathbf{V}$ , при этом стоксов дрейф описывает член  $\beta [\overline{\boldsymbol{\xi}_\tau}, \bar{\boldsymbol{\xi}}]/2$ . При выводе этого уравнения полезно тождество

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + \mathbf{c} \times [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + \mathbf{b} \times [\mathbf{c}, \mathbf{a}] = \nabla(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))$$

для любой тройки бездивергентных векторных полей  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ .

Уравнения (7)–(8) выводились многими авторами при исследовании различных конкретных течений, возникающих в осциллирующих внешних полях, см., например, [1]. Приятная особенность нашей задачи — возможность получить универсальные граничные условия, замыкающие систему (7)–(8).

### 3. Граничные условия для вибротечения

Перейдем к рассмотрению течения в стоксовом слое. В приграничной полоске области  $\bar{D}$  вводим координаты  $x \mapsto (\rho, \theta)$ , где  $\rho(x) = \text{dist}(x, \bar{S})$ , и  $\theta$  — точка на  $\bar{S}$ , ближайшая к  $x$ . Указанные координаты индуцируют разложение  $\mathbf{h} = \mathbf{h}^{\parallel} + \mathbf{h}^{\perp}$ , где первое слагаемое — касательная, а второе — нормальная<sup>‡</sup> компонента  $\mathbf{h}$ . Переписываем систему (1) относительно координат  $(\rho, \theta)$ , разделяем ее нормальную и тангенциальную проекции, и раздуваем стоксов слой с помощью растянутой нормальной координаты  $\eta = \rho/\epsilon$ . Ввиду предположения (4), изменения границы после раздувания уже не малы, поэтому уравнения пограничного слоя приходится рассматривать в переменной области  $\Sigma$  плоскости переменных  $\eta, \tau$ , зависящей от  $\theta$ , как от параметра:

$$\Sigma = \{\eta > \beta\tilde{\eta}_0(\theta, \tau)\}; \quad \tilde{\eta}_0(\theta, \tau) = (\tilde{Y}_0)_{\mathbf{n}}|_{\rho=0} = \partial_{\tau}^{-1}\tilde{\gamma}_0(\theta, \tau). \quad (9)$$

Оказывается, что степенные разложения нормальной и тангенциальной скорости, а также давления в стоксовом слое начинаются с членов разных порядков, так что

$$(\mathbf{v}_0^{\flat})_{\mathbf{n}} = p_0^{\flat} = p_1^{\flat} = 0.$$

В связи с этим, вводим обозначения

$$(\mathbf{v}_{k+1}^{\flat})_{\mathbf{n}} = u_k^{\flat}, \quad p_{k+2}^{\flat} = P_k^{\flat}, \quad \mathbf{w}_k^{\flat} = (\mathbf{v}_k^{\flat})^{\parallel}, \quad \mathbf{w}_k^{\flat} = (\mathbf{v}_k^{\flat})^{\perp}, \quad (\mathbf{v}_k^{\flat})_{\mathbf{n}} = u_k^{\flat}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Уравнения погранслойных поправок и граничные условия к ним принимают вид

$$(\partial_{\tau} + \beta\tilde{\gamma}_0\partial_{\eta} - \partial_{\eta}^2)\mathbf{w}_k^{\flat} = \mathbf{F}_k; \quad \partial_{\eta}u_k^{\flat} = S_k; \quad \partial_{\eta}P_k^{\flat} = R_k \text{ в } \Sigma, \quad (10)$$

$$\mathbf{w}_k^{\flat} = \beta^k(\tilde{Y}_{k\tau} - \mathbf{b}_k)^{\parallel} - \mathbf{w}_k^{\flat}; \quad u_k^{\flat} = \beta^k(\tilde{Y}_{k\tau} - \mathbf{b}_k)_{\mathbf{n}} - u_{k-1}^{\flat} \text{ на } \partial\Sigma, \quad (11)$$

$$(\mathbf{w}_k^{\flat}, u_k^{\flat}, P_k^{\flat}) = o(\eta^{-n}), \quad \eta \rightarrow \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N}); \quad (12)$$

$$\mathbf{b}_k = \text{op}({}_{k-1}\mathbf{v}^{\flat}, {}_{k-1}\mathbf{w}^{\flat}, {}_{k-1}u^{\flat}, {}_k\tilde{Y}); \quad (13)$$

$$\mathbf{F}_k = \text{op}({}_{k-1}u^{\flat}, {}_{k-1}\mathbf{w}^{\flat}, {}_{k-1}P^{\flat}, {}_{k-1}\mathbf{v}^{\flat}, {}_{k-1}p^{\flat}); \quad (14)$$

$$S_k = \text{op}({}_k\mathbf{v}^{\flat}, {}_k p^{\flat}, {}_{k-1}u^{\flat}, {}_{k-1}P^{\flat}, {}_k\mathbf{w}^{\flat}); \quad (15)$$

$$R_k = \text{op}({}_k\mathbf{v}^{\flat}, {}_k p^{\flat}, {}_k u^{\flat}, {}_{k-1}P^{\flat}, {}_k\mathbf{w}^{\flat}). \quad (16)$$

Заметим, что граничные условия (11) ставятся на изменяющейся поверхности

$$\Gamma = \partial\Sigma = \{\eta = \beta\tilde{\eta}_0(\theta, \tau)\}.$$

Замена переменной  $s = \eta - \beta\tilde{\eta}_0 > 0$  преобразует первое уравнение в (10) в стандартное уравнение теплопроводности, а область  $\Sigma$  в неподвижную область  $\{(s, \tau) : s > 0\}$ ; граничные условия при этом смещаются на прямую  $s = 0$ . Выполнение *первого* из граничных условий (11) с точностью до среднего ставит граничное условие первому уравнению в (10); выполнение *второго* из граничных условий (11) с точностью до среднего ставит граничное условие нормальной скорости внешнего потока. Выполнение *обоих* граничных условий (11) *в среднем* ставит граничные условия тангенциальной и нормальной компонентам среднего поля  $\bar{\mathbf{v}}_k^{\flat}$ . Для вычисления этих граничных значений необходимы  $\bar{\mathbf{w}}_k^{\flat}$  и  $\bar{u}_k^{\flat}$ , которые определяются из осредненных уравнений в (10). Подчеркнем, что усреднение по  $\tau$  выполняется относительно подвижной системы координат, т. е. *сначала* переходим к переменной  $s$ , а затем усредняем. Особо отметим, что все уравнения решаются с условием затухания на бесконечности (12).

<sup>‡</sup> Нормаль направлена внутрь жидкости.

Система (10)–(16) обладает треугольной структурой, которая позволяет нам найти сначала  $\mathbf{w}_k^b$ , затем  $u_k^b$ , и, наконец,  $P_k^b$ . Начинаем итерационный процесс, полагая  $\mathbf{b}_0 = 0$ ,  $\mathbf{F}_0 = 0$ . Тогда  $\bar{\mathbf{w}}_0^z = 0$  и  $\bar{\gamma}_0 = 0$ , и уравнение (6) снабжается однородными граничными условиями, как и говорилось в разделе 2.

Опуская громоздкие вычисления, приведем граничные условия для поля  $\bar{\mathbf{v}}_1^z$ . В частности, через  $\hat{Y}_m$  обозначим последовательность коэффициентов Фурье функции  $\tilde{Y}_0 = \tilde{Y}(x, \tau, 0)$ . На поверхности  $\bar{S}$  определим поле  $\mathbf{q} = \tilde{Y}_0 - \boldsymbol{\xi}$ , где поле  $\boldsymbol{\xi}$  задано в (8). По определению  $\mathbf{q} \parallel \bar{S}$ . Обозначим через  $\hat{\mathbf{q}}_m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , последовательность коэффициентов Фурье поля  $\hat{\mathbf{q}}$ . Итак,

$$\begin{aligned} \beta^{-1} \bar{\mathbf{w}}_1^z \Big|_{\bar{S}} &= \overline{(\nabla^{\parallel} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{q}_\tau} / 2 - \overline{[\tilde{Y}_{0\tau}^{\parallel}, \tilde{Y}_0^{\parallel}] / 2} - \overline{\nabla^{\parallel} (\boldsymbol{\xi}_\tau^{\parallel} \cdot \tilde{Y}_0^{\parallel})} - \overline{\tilde{\eta}_0 \nabla^{\parallel} \tilde{\eta}_{0\tau}} - \overline{2\tilde{\eta}_{0\tau} (\tilde{Y}_0^{\parallel}, \nabla) \nabla \rho} \\ &\quad - \overline{(\nabla^{\parallel} \cdot (\tilde{Y}_0 \times \nabla \rho)) (\nabla \rho \times \boldsymbol{\xi}_\tau)} - \frac{1}{2} \sum |m| \left( \nabla^{\parallel} \cdot (\hat{Y}_m \times \nabla \rho) \right) (\nabla \rho \times \hat{\mathbf{q}}_{-m}) \\ &\quad - 2 \overline{(\text{rot}(\boldsymbol{\xi} \times \nabla \rho) \cdot \nabla \rho - \tilde{\eta}_0 \Delta \rho) \mathbf{q}_\tau} - \sum |m| (\nabla^{\parallel} |\hat{\mathbf{q}}_m|^2 \\ &\quad + 4 (\nabla^{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{q}}_m) \hat{\mathbf{q}}_{-m}) / 4 - \overline{\beta (\tilde{Y}_0^{\parallel} \cdot \nabla \tilde{\eta}_0) \mathbf{W}_s} \Big|_{s=0}; \\ \mathbf{W}_\tau &= \mathbf{W}_{ss}, \quad s > 0, \quad \mathbf{W}(0, \tau) = \mathbf{q}_\tau, \quad \mathbf{W}(\infty, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\beta^{-1} \bar{u}_1^z \Big|_{\bar{S}} = \beta^{-1} \bar{\gamma}_1^z = \overline{[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_\tau]_{\mathbf{n}}} / 2. \quad (18)$$

Уравнения (7)–(8) вместе с граничными условиями (17)–(18) дают полную скорость вихротечения  $\mathbf{V}$ .

Заметим, что поле  $\mathbf{V}$  — всегда касательное к  $\bar{S}$ .

## 5. Примеры: тангенциальные и крутильные вибрации

Под тангенциальными вибрациями понимаются такие движения границы, при которых область не изменяется. Пример — крутильные колебания шара. Такие движения естественны, если отсчетная область  $\bar{D}$  инвариантна относительно подгруппы группы движений  $\mathbb{R}^3$ . При тангенциальных вибрациях

$$(\tilde{Y}_0)_{\mathbf{n}} = \tilde{\eta}_0 = 0, \quad \boldsymbol{\xi} = 0; \quad \bar{u}_1^z = 0; \quad \mathbf{q} = \tilde{Y}_0^{\parallel}.$$

Поэтому стоксов дрейф всегда равен нулю.

Пусть жидкость заполняет полупространство  $z > 0$ . Рассмотрим поступательные движения границы

$$\rho = z; \quad \tilde{Y}_0 = \tilde{Y}_0(\tau) \parallel Oxy; \quad \mathbf{q} = \tilde{Y}_0; \quad \nabla^{\parallel} |\hat{\mathbf{q}}_k|^2 = 0; \quad \nabla^{\parallel} \cdot (\hat{\mathbf{q}}_k \times \nabla \rho) = 0.$$

При таких данных правые части во всех уравнениях (17)–(18) равны 0, т. е.  $\bar{u}_1^z = 0$  и  $\bar{\mathbf{w}}_1^z = 0$  на плоскости  $z = 0$ . Следовательно, среднее поле  $\bar{\mathbf{v}}_1^z$  должно быть определено из уравнения (7) при нулевом граничном условии на  $\bar{S}$ . Следовательно,  $\bar{\mathbf{v}}_1^z = 0$  всюду. Таким образом, *поступательные колебания плоских границ не создают вихротечений в главном приближении*. Данный вывод согласуется с рассмотренными [6].

Рассмотрим *вращательно-поступательные движения круглой трубы*, так что  $\bar{D} = \{0 \leq r \leq 1\}$  в цилиндрических координатах  $(r, \theta, z)$ , и  $Y_0 = \tilde{\kappa}_0(\tau) \mathbf{e}_\theta + \tilde{\kappa}_1(\tau) \mathbf{e}_z = \mathbf{q}$ , где  $\tilde{\kappa}_0(\tau)$  и  $\tilde{\kappa}_1(\tau)$  — скалярные функции, равные в среднем нулю. Тогда

$$\nabla^{\parallel} \cdot \mathbf{q} = 0; \quad \nabla^{\parallel} |\hat{\mathbf{q}}_k|^2 = 0; \quad \nabla^{\parallel} \cdot (\hat{\mathbf{q}}_k \times \nabla \rho) = 0, \quad \rho = 1 - r.$$

Таким образом, поступательно-вращательные тангенциальные колебания круглой трубы не дают вибротечения в главном приближении.

Рассмотрим *крутильные вибрации шара, полностью погруженного в безграничную жидкость*. Тогда  $\bar{D} = \{r > 1\}$ ,  $r = |x|$ ,  $\bar{S} = \{r = 1\}$ ,  $\rho = r - 1$ ,  $\nabla\rho = \theta = x/r$ ,

$$\tilde{Y}_0 = \tilde{\mu}(\tau)\mathbf{k} \times \theta, \quad \mathbf{k} \equiv \text{const}, \quad |\mathbf{k}| = 1,$$

где  $\tilde{\mu}$  — скалярная функция с нулевым средним. Обозначим через  $\hat{\mu}_m$  ее коэффициенты Фурье. Тогда

$$\hat{\mathbf{q}}_m = \hat{\mu}_m \mathbf{k} \times \theta.$$

Отсюда вытекает, что в граничном условии (17) имеется всего два ненулевых слагаемых:

$$-\frac{1}{4} \sum |m| |\nabla^{\parallel} \hat{\mathbf{q}}_m|^2, \quad -\frac{1}{2} \sum |m| \left( \nabla^{\parallel} \cdot (\hat{Y}_m \times \nabla\rho) \right) (\nabla\rho \times \hat{\mathbf{q}}_{-m}).$$

Опуская рутинные вычисления, приводим окончательный результат:

$$\bar{u}_1^2|_{\bar{S}} = 0; \quad \bar{\mathbf{w}}_1^2|_{\bar{S}} = -(\kappa\beta/4) \sin 2\psi \mathbf{e}, \quad \kappa = \sum |m| |\hat{\mu}_m|^2, \quad \cos \psi = \mathbf{k} \cdot \theta,$$

где  $\psi$  — широтная координата на  $\bar{S}$ , выбранная так, что  $\psi = \pi/2$  на экваторе, и  $\mathbf{e}$  — орт координатного направления  $\psi$ ; на экваторе  $\mathbf{e}$  сонаправлен  $\mathbf{k}$ . Итак, *крутильные вибрации шара, полностью погруженного в безграничную жидкость, создают эффективное вибротечение, перемещающее жидкость вдоль граничной сферы от полюсов к экватору*<sup>4</sup>, что согласуется с экспериментальными данными *Hollerbach* и др. [11] и с теорией, данной в [4].

Для сравнения рассмотрим возвратно-поступательные вибрации шара, полностью погруженного в безграничную жидкость. Тогда  $\tilde{Y}_0 = \mu(\tau)\mathbf{k}$  (с теми же  $\bar{D}$ ,  $\bar{S}$ ,  $\mu$  и  $\mathbf{k}$ , что и в случае крутильных вибраций). Хотя данные вибрации не тангенциальны, они, тем не менее, не вызывают стокова дрейфа, так как  $[\xi_\tau, \xi] = 0$  всюду. Далее,

$$\mathbf{q} = 3\mu(\theta \times (\mathbf{k} \times \theta))/2.$$

Пусть  $\mu = \sin \tau$ . Тогда в граничном условии (17) ненулевое слагаемое одно:

$$-\frac{1}{4} \sum |m| \left( |\nabla^{\parallel} \hat{\mathbf{q}}_m|^2 + 4(\nabla^{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{q}}_m) \hat{\mathbf{q}}_{-m} \right).$$

Отсюда находим

$$\bar{u}_1^2 = 0; \quad \bar{\mathbf{w}}_1^2 = (45\kappa\beta/16) \sin 2\psi \mathbf{e} \quad \text{на } \bar{S}$$

(в тех же обозначениях, что и в случае крутильных колебаний). Итак, *эффективное вибротечение, создаваемое гармоническими возвратно-поступательными вибрациями шара, полностью погруженного в безграничную жидкость, перемещает жидкость вдоль граничной сферы от экватора к полюсам*.

<sup>4</sup> Говоря о поведении потока вблизи границы (стенки), мы имеем в виду расстояние, малое по сравнению с характерным размером рассматриваемого течения, но много большее  $\epsilon$ , т. е. толщины стокова слоя.

## 6. Нормальные вибрации

Под нормальными понимаются такие движения границы, что  $\tilde{Y}_0^{\parallel} = 0$ . В таком случае

$$\tilde{Y}_0 = \tilde{\eta}_0 \nabla \rho, \quad \mathbf{q} = -\xi^{\parallel}.$$

Рассмотрим нормальную вибрацию границы жидкого полупространства. Обозначаем через  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  орты декартовых координат  $Oxyz$ , относительно которых  $\bar{D} = \{z > 0\}$ ,  $\bar{S} = \{z = 0\}$  и  $\rho = z$ . Пусть  $\tilde{\eta}_0 = \tilde{\eta}_0(x, \tau)$ . Тогда  $\xi = \xi \mathbf{e}_x + \zeta \mathbf{e}_z$ ,  $\zeta|_{z=0} = \tilde{\eta}_0$ ,  $\mathbf{q} = -\xi \mathbf{e}_x$ . Далее,  $\text{rot}(\xi \times \nabla \rho) \cdot \nabla \rho = -\xi_x$ , и при этом  $\Delta \rho = 0$ . Отсюда находим

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{w}}_1^{\perp}|_{\bar{S}} &= w \mathbf{e}_x, \quad w = \beta \overline{\tilde{\eta}_{0x} \tilde{\eta}_{0\tau}} - (3\beta/2) (\overline{\xi_x \xi_{\tau}} + (\partial_x/2) \sum |k| |\hat{\xi}_k|^2)|_{z=0}; \\ \bar{u}_1^i &= \beta \bar{\psi}_x|_{z=0}, \quad \bar{\psi} = \overline{\zeta \xi_{\tau}}. \end{aligned}$$

Стоксов дрейф задается полем

$$\frac{\beta}{2} \overline{[\xi_{\tau}, \xi]} = \beta (\bar{\psi}_z \mathbf{e}_x - \bar{\psi}_x \mathbf{e}_z), \quad \bar{\psi} = \overline{\zeta \xi_{\tau}}.$$

Рассмотрим течение, создаваемое плоской бегущей волной. С этой целью полагаем  $\tilde{\eta}_0(x, \tau) = f(\alpha x - \tau)$ ,  $f(\sigma) = \sum \hat{f}_k e^{ik\sigma}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \xi &= \sum \hat{f}_k e^{-\alpha|k|z+ik\sigma}; \quad \xi = -i \sum \hat{f}_k \text{sgn } k e^{-\alpha|k|z+ik\sigma}; \quad \sigma = \alpha x - \tau; \\ \overline{\tilde{\eta}_{0x} \tilde{\eta}_{0\tau}} &= \overline{\xi_x \xi_{\tau}}|_{z=0} = -\alpha \overline{f'^2}; \quad \bar{\psi} = -\sum |\hat{f}_k|^2 |k| e^{-2|k|\alpha z}; \\ \bar{u}_1^i &= 0, \quad \bar{\mathbf{v}}_1^i = w \mathbf{e}_x, \quad w = \alpha \beta \overline{f'^2}/2 \equiv \text{const}, \\ \frac{\beta}{2} \overline{[\xi_{\tau}, \xi]} &= \beta \bar{\psi}'(z) \mathbf{e}_x = 2\beta \alpha \sum |\hat{f}_k|^2 k^2 e^{-2|k|\alpha z}. \end{aligned}$$

Полная скорость вибротечения

$$\mathbf{V} = W(z) \mathbf{e}_x, \quad W(z) = \alpha \beta \overline{f'^2}/2 + 2\beta \alpha \left( \sum |\hat{f}_k|^2 k^2 e^{-2|k|\alpha z} \right).$$

Таким образом, эффективное вибротечение, вызванное движением плоской волны нормальных смещений вдоль границы жидкого полупространства, перемещает материальные частицы в направлении распространения волны (так как  $W(z) > 0$  для каждого  $z > 0$ ). Линии тока везде параллельны направлению движения волны. Величина скорости зависит только от глубины и с ростом глубины экспоненциально быстро приближается к постоянной, зависящей лишь от вида бегущей волны.

Рассмотрим нормальные колебания стенки круглой трубы, создаваемые спиральной бегущей волной. Имеем  $\bar{D} = \{r < 1\}$ ,  $\bar{S} = \{r = 1\}$ ,  $\rho = 1 - r$ ;

$$\tilde{\eta}_0(\theta, z, \tau) = f(\alpha z + n\theta - \tau), \quad n \in \mathbb{N}, \quad f = f(\sigma) = \sum \hat{f}_k e^{ik\sigma},$$

где  $r, \theta, z$  — цилиндрические координаты. Как обычно,  $I_p(s)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , — модифицированная функция Бесселя первого рода индекса  $p$ . Вводим обозначение

$$\chi_{k,n,\alpha}(s) = \frac{d}{2ds} \left( \frac{I_{n|k|}(s)}{I'_{n|k|}(\alpha n|k|)} \right)^2; \quad \mu_{k,n,\alpha} = \frac{I_{|k|n}(\alpha|k|)}{I'_{|k|n}(\alpha|k|)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Граничные условия для средней скорости на  $\bar{S}$  таковы:

$$\bar{\mathbf{w}}_1^{\perp} = \beta C_{n,\alpha} (n \mathbf{e}_{\theta} + \alpha \mathbf{e}_z); \quad \bar{u}_1^i = 0. \quad (19)$$

Отсюда находим среднюю скорость

$$\bar{v}_1^2 = \beta C_{n,\alpha} (n r \mathbf{e}_\theta + \alpha \mathbf{e}_z); \quad (20)$$

$$C_{n,\alpha} = \sum k^2 |\hat{f}_k|^2 \left( \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{n^2}{\alpha^2} \right) \mu_{k,n,\alpha}^2 - \frac{2\mu_{k,n,\alpha}}{|k|\alpha} - 1 \right). \quad (21)$$

Поправка Стокса и скорость  $\mathbf{V}$  эффективного вибротечения таковы:

$$(\beta/2) \overline{[\boldsymbol{\xi}_\tau, \boldsymbol{\xi}]} = \beta (v_{n,\alpha}(r) n \mathbf{e}_\theta + w_{n,\alpha}(r) \alpha \mathbf{e}_z); \quad (22)$$

$$v_{n,\alpha} = \frac{1}{r} \sum k^2 |\hat{f}_k|^2 \left( \frac{d\chi_{k,n,\alpha}(\alpha|k|r)}{dr} - \frac{\chi_{k,n,\alpha}(\alpha|k|r)}{\alpha|k|r} \right); \quad (23)$$

$$w_{n,\alpha} = \sum k^2 |\hat{f}_k|^2 \left( \frac{d\chi_{k,n,\alpha}(\alpha|k|r)}{dr} + \frac{\chi_{k,n,\alpha}(\alpha|k|r)}{\alpha|k|r} \right); \quad (24)$$

$$\mathbf{V} = (\beta/2) \overline{[\boldsymbol{\xi}_\tau, \boldsymbol{\xi}]} + \bar{v}_1^2 = \beta (v_{n,\alpha}^d n \mathbf{e}_\theta + w_{n,\alpha}^d \alpha \mathbf{e}_z); \quad (25)$$

$$v_{n,\alpha}^d = r C_{n,\alpha} + v_{n,\alpha}; \quad w_{n,\alpha}^d = C_{n,\alpha} + w_{n,\alpha}. \quad (26)$$

Таким образом, эффективное вибротечение, вызываемое спиральной волной нормальных смещений стенки круглой трубы, вызывает поступательно-вращательное движение материальных частиц, при этом осевая и вращательная скорость зависят только от расстояния от оси трубы, а линии тока представляют собой спирали.

Поправки Стокса к осевой и вращательной скорости всегда положительны, т. е. азимутальная и осевая направленности стоковского дрейфа такие же, как у волны смещений стенки трубы. Действительно, в силу модифицированного уравнения Бесселя

$$\begin{aligned} (I_p' I_p)' + s^{-1} I_p' I &= I_p'^2 + (1 + s^{-2} p^2) I_p^2; \\ (I_p' I_p)' - s^{-1} I_p' I &= (I_p' - s^{-1} I_p)^2 + (1 + (p^2 - 1) s^{-2}) I_p^2. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает положительность выражений (23) и (24). Несмотря на это, как осевая, так и азимутальная скорости эффективного вибротечения (26) могут менять знак, т. е. различные слои жидкости могут вращаться и (или) перемещаться вдоль трубы разнонаправленно. Действительно, рассмотрим длинноволновый предел  $\alpha \rightarrow 0$ , и пусть  $f$  — тригонометрический полином степени  $N$ . Тогда

$$\begin{aligned} C_{n,\alpha} &= \sum k^2 |\hat{f}_k|^2 (1/2 - 2/(|k|n) + O(\alpha)), \quad \alpha \rightarrow 0; \\ v_{n,\alpha}^d \Big|_{r=1} &= \sum k^2 |\hat{f}_k|^2 (5/2 - 4/(|k|n) + O(\alpha)), \quad \alpha \rightarrow 0; \\ w_{n,\alpha}^d \Big|_{r=1} &= \sum k^2 |\hat{f}_k|^2 (5/2 - 2/(|k|n) + O(\alpha)), \quad \alpha \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Видно, что величина  $C_{n,\alpha}$  может быть отрицательной, т. е. вращательная и осевая составляющие средней скорости (без учета стоковой поправки) могут быть направлены противоположно движению волны смещений при условии, что  $n = 1, 2, 3$  и  $\alpha$  достаточно мало. Кроме того, если  $n = 1$ , то величина  $v_{n,\alpha}^d$  может быть отрицательной при  $r = 1$ , т. е. азимутальная скорость эффективного вибротечения жидкости вблизи стенки трубы может быть противоположна по знаку азимутальной скорости волны смещений стенки. Напротив, осевая скорость в  $w_{n,\alpha}^d$  длинноволновом пределе всегда положительна, т. е. осевая скорость эффективного вибротечения около стенки трубы всегда сонаправлена осевой скорости волны смещений стенки.

Теперь рассмотрим окрестность оси трубы

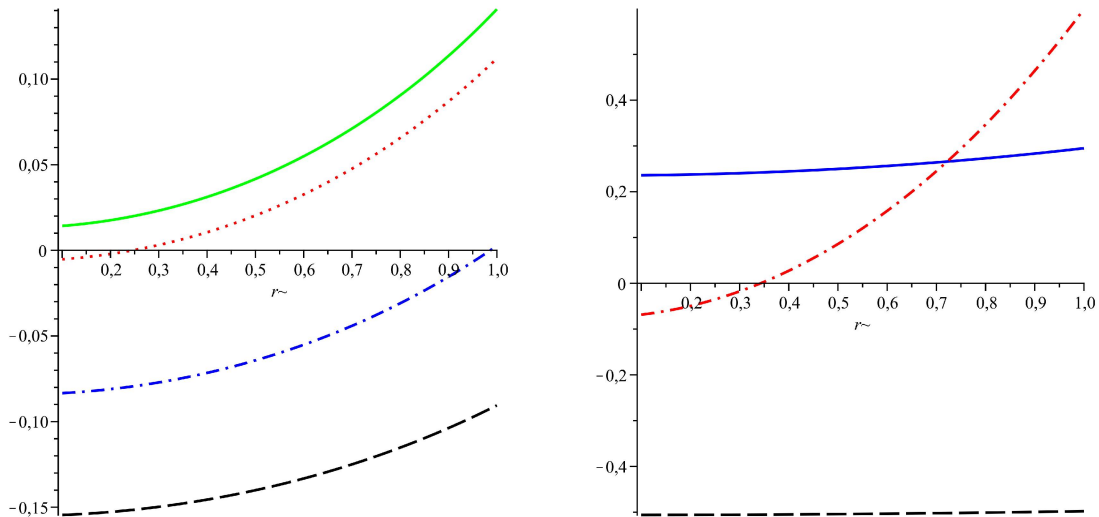
$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{v_{n,\alpha}(r)}{r} = \alpha^2 \sum_{0 < n|k| \leq 2} \frac{k^2 |\hat{f}_k|^2}{4|kn| I_{n|k|}^2(\alpha|k|)}; \quad n = 1, 2;$$

$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{v_{n,\alpha}}{r} = 0, \quad n > 2; \quad w_{1,\alpha}|_{r=0} = \frac{5|\hat{f}_1|^2}{2I_1^2(\alpha)}, \quad w_{n,\alpha}|_{r=0} = 0, \quad n > 1.$$

Мы заключаем, что в длинноволновом пределе осевая скорость эффективного вобротечения  $w_{n,\alpha}^d$  может быть отрицательной на оси трубы, если  $n = 2, 3$ . Следовательно, осевое вобротечение всегда сонаправлено волне смещений около стенки трубы, но может следовать в противоположном направлении около оси трубы. Отметим, что указанное явление заведомо невозможно, если  $n = N = 1$  (напомним, что  $N$  — степень многочлена  $f$ ) или  $n > 3$ .

Рассмотрим длинноволновый предел для угловой скорости эффективного вобротечения  $\Gamma_{n,\alpha}(r) = r^{-1}v_{n,\alpha}^d = C_{n,\alpha} + r^{-1}v_{n,\alpha}$ . Если  $n > 3$ , то жидкость и волна смещений стенки вращаются в одном направлении. В противном случае вращения сонаправлены возле стенки трубы, а около оси трубы возможно встречное вращение. Если  $n = 1$ , то не исключено, что жидкость и волна смещений стенки вращаются в противоположных направлениях и возле стенки трубы, и это неизбежно, если  $n = N = 1$ , см. рис. 1.

На рис. 1 представлены профили угловой скорости эффективного вобротечения в зависимости от расстояния до оси трубы для  $f(\sigma) = \cos(\sigma)$ . На правой панели отображаются графики для различных азимутальных волновых чисел, в то время как длина волны фиксирована. На левой панели отображаются графики для волн различной длины, в то время как азимутальное волновое число фиксировано. Стоит отметить, что существуют такие значения длины волны, что угловая скорость оказывается намного меньше у стенки трубы, чем у оси. Глядя на правую панель, можно увидеть, что удвоение азимутального волнового числа способно перенаправить вращение всех дрейфующих частиц. Дальнейшее увеличение волнового числа от удвоенного к утроенному снова изменяет направление вращения, однако изменение происходит не везде, а только вблизи оси.



**Рис. 1.** Слева — графики  $\Gamma_{1,\alpha}(r)$ :  $\alpha = 1.13$  (сплошная линия),  $\alpha = 1.1$  (точки),  $\alpha = 0.99$  (точки-тире) и  $\alpha = 0.9$  (пунктир). Справа — графики  $\Gamma_{n,1/2}(r)$ :  $n = 1$  (пунктир),  $n = 2$  (сплошная линия) и  $n = 3$  (точки-тире).



## Литература

1. *Craik A. D. D., Leibovich S.* A Rational model for langmuir circulations // J. Fluid Mech.—1976.—Vol. 73, № 3.—P. 401–426. DOI: 10.1017/S0022112076001420.
2. *Duck P. W., Smith F. T.* Steady streaming induced between oscillating cylinders // J. Fluid Mech.—1979.—Vol. 91, № 1.—P. 93–110. DOI: 10.1017/S0022112079000057.
3. *Haddon E. W., Riley N.* The steady streaming induced between oscillating circular cylinders // The Quarterly J. of Mech. and Appl. Math.—1979.—Vol. 32, № 3.—P. 265–282. DOI: 10.1093/qjmam/32.3.265.
4. *Gopinath A.* Steady streaming due to small-amplitude torsional oscillations of a sphere in a viscous fluid // The Quarterly J. of Mech. and Appl. Math.—1993.—Vol. 46, № 3.—P. 501–520. DOI: 10.1093/qjmam/46.3.501.
5. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое разложение решения задачи о вибрационной конвекции // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2000.—Т. 40, № 9.—P. 1416–1424.
6. *Vladimirov V. A.* Viscous flows in a half space caused by tangential vibrations on its boundary // Stud. Appl. Math.—2008.—Vol. 121, № 4.—P. 337–367. DOI: 10.1111/j.1467-9590.2008.00418.x.
7. *Ilin K. and Morgulis A.* On the steady streaming induced by vibrating walls // SIAM J. on Appl. Math.—2012.—Vol. 72, № 5.—P. 1406–1427. DOI: 10.1137/110859634.
8. *Riley N.* Steady streaming // Annual Review of Fluid Mech.—2001.—Vol. 33.—P. 43–65. DOI: 10.1146/annurev.fluid.33.1.43.
9. *Longuet-Higgins M. S.* Mass transport in water waves // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Series A. Mathematical and Physical Sciences.—1953.—Vol. 245, № 903.—P. 535–581.
10. *Longuet-Higgins M. S.* Peristaltic pumping in water waves // J. Fluid Mech.—1983.—Vol. 137.—P. 393–407. DOI: 10.1017/S0022112083002475.
11. *Hollerbach R. et al.* The flow around a torsionally oscillating sphere // Physics of Fluids.—2002.—Vol. 14, № 12.—P. 4192–4205. DOI: 10.1063/1.1518029.

*Статья поступила 6 мая 2019 г.*

Ильин Константин Иванович  
Йоркский университет, лектор  
Великобритания, Хеслингтон, Йорк YO10 5DD  
E-mail: [konstantin.ilin@york.ac.uk](mailto:konstantin.ilin@york.ac.uk)  
<https://orcid.org/0000-0003-2770-3489>;

Моргулис Андрей Борисович  
Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН,  
ведущий научный сотрудник отдела диф. уравнений  
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;  
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича  
Южного федерального университета,  
профессор кафедры вычислительной математики и мат. физики  
РОССИЯ, 344099, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а  
E-mail: [morgulisandrey@gmail.com](mailto:morgulisandrey@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0001-8575-4917>

VIBRATIONAL FLOWS OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUIDS  
FOR HIGH REINOLDS NUMBERSIlin, K. I.<sup>1</sup>, Morgulis, A. B.<sup>2,3</sup><sup>1</sup> The University of York, Heslington, York YO10 5DD, UK;<sup>2</sup> I. I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences,  
Southern Mathematical Institute VSC RAS,  
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia;<sup>3</sup> Southern Federal University,  
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344099, Russia

E-mail: konstantin.ilin@york.ac.uk, morgulisandrey@gmail.com

**Abstract.** The article presents the high-frequency asymptotics of the Navier–Stokes system, which describes the motion of a viscous incompressible fluid in the region bounded by a vibrating surface. The boundary conditions require the coincidence of the velocity vectors of the material particle of the fluid and the point of the boundary in which the particle is located. Consequently, the fluid is not allowed either to slip along the boundary (the no-slip condition) or to penetrate through it. It is assumed that the motion of the boundary surface is given and periodic in time, and the domain confined within it stays at rest on average but, generally speaking, can be changing its shape. The frequency of oscillations of the boundary tends to infinity, and the amplitude tends to zero, but the ratio of the amplitude to the Stokes's layer thickness remains of the order of unity. The main result is the explicit form of the equations and boundary conditions that determine the mean flow in the most general case, without special assumptions about the problem data. On this basis, a number of specific flows have been investigated, in particular, a flow in a circular pipe, caused by the normal vibration of its walls.

**Key words:** Navier–Stokes system, high-frequency asymptotic, vibration, mean flow, steady streaming.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 76D05, 76D10, 76D17, 35Q30, 35Q35.

**For citation:** Ilin, K. I., Morgulis, A. B. Vibrational Flows of Viscous Incompressible Fluids for High Reynolds Numbers, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 2, pp. 5–17 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32112.

## References

1. Craik, A. D. D. and Leibovich, S. A Rational Model for Langmuir Circulations, *J. Fluid Mech.*, 1976, vol. 73, no. 3, pp. 401–426. DOI: 10.1017/S0022112076001420.
2. Duck, P. W. and Smith, F. T. Steady Streaming Induced Between Oscillating Cylinders, *J. Fluid Mech.*, 1979, vol. 91, no. 1, pp. 93–110. DOI: 10.1017/S0022112079000057.
3. Haddon, E. W. and Riley, N. The Steady Streaming Induced Between Oscillating Circular Cylinders, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1979, vol. 32, no. 3, pp. 265–282. DOI: 10.1093/qjmam/32.3.265.
4. Gopinath, A. Steady Streaming due to Small-Amplitude Torsional Oscillations of a Sphere in a Viscous Fluid, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1993, vol. 46, no. 3, pp. 501–520. DOI: 10.1093/qjmam/46.3.501.
5. Levenshtam, V. B. Asymptotic Expansion of the Solution of a Problem of Vibrational Convection, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2000, vol. 40, no. 9, pp. 1357–1365.
6. Vladimirov, V. A. Viscous Flows in a Half Space Caused by Tangential Vibrations on its Boundary, *Studies in Applied Mathematics*, 2008, vol. 121, no. 4, pp. 337–367. DOI: 10.1111/j.1467-9590.2008.00418.x.
7. Ilin, K. and Morgulis, A. On The Steady Streaming Induced By Vibrating Walls, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2012, vol. 72, no. 5, pp. 1406–1427. DOI: 10.1137/110859634.
8. Riley, N. Steady Streaming, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2001, vol. 33, pp. 43–65. DOI: 10.1146/annurev.fluid.33.1.43.

9. Longuet-Higgins, M. S. Mass Transport in Water Waves, *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 1953, vol. 245, no. 903, pp. 535–581.
10. Longuet-Higgins, M. S. Peristaltic Pumping in Water Waves, *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 137, pp. 393–407. DOI: 10.1017/S0022112083002475.
11. Hollerbach, R. et al. The Flow Around a Torsionally Oscillating Sphere, *Physics of Fluids*, 2002, vol. 14, no. 12, pp. 4192–4205. DOI: 10.1063/1.1518029.

*Received May 6, 2018*

KONSTANTIN ILIN  
The University of York,  
Heslington, York YO10 5DD, United Kingdom,  
*Lecturer*

E-mail: [konstantin.ilin@york.ac.uk](mailto:konstantin.ilin@york.ac.uk)  
<https://orcid.org/0000-0003-2770-3489>

ANDREY MORGULIS  
Southern Mathematical Institute VSC RAS,  
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia,  
*Leading Researcher at the Division of Differential Equation;*  
I. I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences,  
Southern Federal University,  
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344099, Russia,  
*Professor*

E-mail: [morgulisandrey@gmail.com](mailto:morgulisandrey@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0001-8575-4917>

УДК 519.17

DOI 10.23671/VNC.2019.2.32113

## RANDIC TYPE ADDITIVE CONNECTIVITY ENERGY OF A GRAPH

K. V. Madhusudhan<sup>1</sup>, P. Siva Kota Reddy<sup>2</sup> and K. R. Rajanna<sup>3</sup>

<sup>1</sup> ATME College of Engineering, Mysore 570 028, Karnataka, India;

<sup>2</sup> Siddaganga Institute of Technology, B. H. Road, Tumkur 572 103, Karnataka, India;

<sup>3</sup> Acharya Institute of Technology, Bangalore 560 107, Karnataka, India

E-mail: E-mail: kvmadhu13@gmail.com; reddy\_math@yahoo.com, pskreddy@sit.ac.in;

rajanna@acharya.ac.in

**Abstract.** The Randic type additive connectivity matrix of the graph  $G$  of order  $n$  and size  $m$  is defined as  $RA(G) = (R_{ij})$ , where  $R_{ij} = \sqrt{d_i} + \sqrt{d_j}$  if the vertices  $v_i$  and  $v_j$  are adjacent, and  $R_{ij} = 0$  if  $v_i$  and  $v_j$  are not adjacent, where  $d_i$  and  $d_j$  be the degrees of vertices  $v_i$  and  $v_j$  respectively. The purpose of this paper is to introduce and investigate the Randic type additive connectivity energy of a graph. In this paper, we obtain new inequalities involving the Randic type additive connectivity energy and presented upper and lower bounds for the Randic type additive connectivity energy of a graph. We also report results on Randic type additive connectivity energy of generalized complements of a graph.

**Key words:** Randic type additive connectivity energy, Randic type additive connectivity eigenvalues.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 05C50.

**For citation:** Madhusudhan, K. V., Reddy, P. S. K. and Rajanna, K. R. Randic Type Additive Connectivity Energy of a Graph, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 2, pp. 18–26. DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32113.

### 1. Introduction

Let  $G$  be a simple, finite, undirected graph. The energy  $E(G)$  is defined as the sum of the absolute values of the eigenvalues of its adjacency matrix. Basically energy of graph is originated from chemistry. In For more details on energy of graphs (see [1, 2]).

In chemistry, we can represent the conjugated hydrocarbos by a molecular graph. Each edge between the carbon-carbon atoms can be represented by an edge. Here we will neglect the hydrogen atoms. Now a days energy of graph attracting more and more researchers due its significant applications. The Randic type additive connectivity matrix  $RA(G) = (R_{ij})_{n \times n}$  is given by

$$RA_{ij} = \begin{cases} \sqrt{d_i} + \sqrt{d_j}, & v_i \sim v_j, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The characteristic polynomial of  $RA(G)$  is denoted by  $\phi_{RA}(G, \lambda) = \det(\lambda I - RA(G))$ . Since the Randic type additive connectivity matrix is real and symmetric, its eigenvalues are

real numbers and we label them in non-increasing order  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ . The minimum dominating Randic energy is given by

$$RAE(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|. \tag{1}$$

DEFINITION 1.1. The spectrum of a graph  $G$  is the list of distinct eigenvalues  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r$ , with their multiplicities  $m_1, m_2, \dots, m_r$ , and we write it as

$$\text{Spec}(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ m_1 & m_2 & \dots & m_r \end{pmatrix}.$$

In [3, 4], the authors defined the minimum covering Randic energy of a graph and minimum dominating Randic energy of a graph and presented the upper and lower bounds on these new energies.

This paper is organized as follows. In the Section 3, we get some basic properties of Randic type additive connectivity energy of a graph. In the Section 4, Randic type additive connectivity energy of some standard graphs are obtained.

## 2. Some basic properties of Randic type additive connectivity energy of a graph

Let us define the number  $K$  as

$$K = \sum_{i < j} (\sqrt{d_i} + \sqrt{d_j})^2.$$

Then we have

**Proposition 2.1.** *The first three coefficients of the polynomial  $\phi_{RA}(G, \lambda)$  are as follows:*

- (i)  $a_0 = 1$ ,
- (ii)  $a_1 = 0$ ,
- (iii)  $a_2 = -K$ .

◁ (i) By the definition of  $\Phi_{RA}(G, \lambda) = \det[\lambda I - RA(G)]$ , we get  $a_0 = 1$ .

(ii) The sum of determinants of all  $1 \times 1$  principal submatrices of  $RA(G)$  is equal to the trace of  $RA(G)$  implying that

$$a_1 = (-1)^1 \times \text{the trace of } RA(G) = 0.$$

(iii) By the definition, we have

$$(-1)^2 a_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ii}a_{jj} - a_{ji}a_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ii}a_{jj} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ji}a_{ij} = -K. \triangleright$$

**Proposition 2.2.** *If  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  are the Randic type additive connectivity eigenvalues of  $RA(G)$ , then*

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2K.$$

◁ It follows as

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ji} = 2 \sum_{i < j} (a_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n (a_{ii})^2 = 2 \sum_{i < j} (a_{ij})^2 = 2P. \triangleright$$

Using this result, we now obtain lower and upper bounds for the Randic type additive connectivity energy of a graph:

**Theorem 2.1.** *Let  $G$  be a graph with  $n$  vertices. Then*

$$RA(G) \leq \sqrt{2nK}.$$

◁ Let  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  be the eigenvalues of  $RA(G)$ . By the Cauchy-Schwartz inequality we have

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Let  $a_i = 1$ ,  $b_i = |\lambda_i|$ . Then

$$\left( \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n 1 \right) \left( \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right)$$

implying that

$$[RAE]^2 \leq n \cdot 2K$$

and hence we get

$$[RAE] \leq \sqrt{2nK}$$

as an upper bound.  $\triangleright$

**Theorem 2.2.** *Let  $G$  be a graph with  $n$  vertices. If  $R = \det RA(G)$ , then*

$$RAE(G) \geq \sqrt{2K + n(n-1)R^{\frac{2}{n}}}.$$

◁ By definition, we have

$$(RAE(G))^2 = \left( \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \right)^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \sum_{j=1}^n |\lambda_j| = \left( \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right) + \sum_{i \neq j} |\lambda_i| |\lambda_j|.$$

Using arithmetic-geometric mean inequality, we have

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} |\lambda_i| |\lambda_j| \geq \left( \prod_{i \neq j} |\lambda_i| |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{n(n-1)}}.$$

Therefore,

$$\begin{aligned} [RA(G)]^2 &\geq \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 + n(n-1) \left( \prod_{i \neq j} |\lambda_i| |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{n(n-1)}} \\ &\geq \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 + n(n-1) \left( \prod_{i=1}^n |\lambda_i|^{2(n-1)} \right)^{\frac{1}{n(n-1)}} \\ &= \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 + n(n-1)R^{\frac{2}{n}} = 2K + n(n-1)R^{\frac{2}{n}}. \end{aligned}$$

Thus,

$$RAE(G) \geq \sqrt{2K + n(n-1)R_n^2}. \triangleright$$

Let  $\lambda_n$  and  $\lambda_1$  are the minimum and maximum values of all  $\lambda_i$ 's. Then the following results can easily be proven by means of the above results:

**Theorem 2.3.** For a graph  $G$  of order  $n$ ,

$$RAE(G) \geq \sqrt{2Kn - \frac{n^2}{4}(\lambda_1 - \lambda_n)^2}.$$

**Theorem 2.4.** For a graph  $G$  of order  $n$  with non-zero eigenvalues, we have

$$RAE(G) \geq \frac{2\sqrt{\lambda_1\lambda_n}\sqrt{2Kn}}{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}.$$

**Theorem 2.5.** Let  $G$  be a graph of order  $n$ . Let  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$  be the eigenvalues in increasing order. Then

$$RAE(G) \geq \frac{|\lambda_1||\lambda_n|n + 2K}{|\lambda_1| + |\lambda_n|}.$$

### 3. Radic type additive connectivity energy of Some Standard Graphs

**Theorem 3.1.** The Radic type additive connectivity energy of a complete graph  $K_n$  is  $RE^D(K_n) = 4(n-1)^{\frac{3}{2}}$ .

$\triangleleft$  Let  $K_n$  be the complete graph with vertex set  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . The Radic type additive connectivity matrix is

$$RA(K_n) = \begin{bmatrix} 1 & 2\sqrt{n-1} & 2\sqrt{n-1} & \dots & 2\sqrt{n-1} & 2\sqrt{n-1} \\ 2\sqrt{n-1} & 0 & 2\sqrt{n-1} & \dots & 2\sqrt{n-1} & 2\sqrt{n-1} \\ 2\sqrt{n-1} & 2\sqrt{n-1} & 0 & \dots & 2\sqrt{n-1} & 2\sqrt{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2\sqrt{n-1} & 2\sqrt{n-1} & \dots & 2\sqrt{n-1} & 0 & 2\sqrt{n-1} \\ 2\sqrt{n-1} & 2\sqrt{n-1} & \dots & 2\sqrt{n-1} & 2\sqrt{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Hence, the characteristic equation is

$$(\lambda + 2\sqrt{n-1})^{n-1}(\lambda - 2(n-1)^{\frac{3}{2}}) = 0$$

and the spectrum is

$$\text{Spec}_R^D(K_n) = \begin{pmatrix} 2(n-1)^{\frac{3}{2}} & -2\sqrt{n-1} \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}.$$

Therefore, we get  $RAE(K_n) = 4(n-1)^{\frac{3}{2}}$ .  $\triangleright$

**Theorem 3.2.** The Radic type additive connectivity energy of star graph  $K_{1,n-1}$  is

$$RAE(K_{1,n-1}) = 2[\sqrt{n-1} + (n-1)].$$

◁ Let  $K_{1,n-1}$  be the star graph with vertex set  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ . Here  $v_0$  be the center. Randic type additive connectivity matrix is

$$RA(K_{1,n-1}) = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{n-1}+1 & \sqrt{n-1}+1 & \dots & \sqrt{n-1}+1 & \sqrt{n-1}+1 \\ \sqrt{n-1}+1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{n-1}+1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{n-1}+1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{n-1}+1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

The characteristic equation is

$$\lambda^{n-2}(\lambda + \sqrt{n-1} + (n-1))(\lambda - (\sqrt{n-1} + (n-1))) = 0$$

and the spectrum would be

$$\text{Spec}_R^D(K_{1,n-1}) = \begin{pmatrix} \sqrt{n-1} + (n-1) & 0 & -\sqrt{n-1} + (n-1) \\ 1 & n-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Therefore,  $RAE(K_{1,n-1}) = 2[\sqrt{n-1} + (n-1)]$ . ▷

**Theorem 3.3.** *The Randic type additive connectivity energy of Crown graph  $S_n^0$  is*

$$RAE(S_n^0) = 8(n-1)^{\frac{3}{2}}.$$

◁ Let  $S_n^0$  be a crown graph of order  $2n$  with vertex set  $\{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . The Randic type additive connectivity matrix is

$$RAE(S_n^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2\sqrt{n-1} & \dots & 2\sqrt{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2\sqrt{n-1} & 0 & \dots & 2\sqrt{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2\sqrt{n-1} & \dots & 2\sqrt{n-1} & 2\sqrt{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2\sqrt{n-1} & \dots & 2\sqrt{n-1} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{n-1} & \dots & 2\sqrt{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2\sqrt{n-1} & 0 & \dots & 2\sqrt{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2\sqrt{n-1} & 2\sqrt{n-1} & \dots & 2\sqrt{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2\sqrt{n-1} & 2\sqrt{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Hence, the characteristic equation is

$$(\lambda + 2\sqrt{n-1})^{n-1} (\lambda - 2\sqrt{n-1})^{n-1} (\lambda - 2(n-1)^{\frac{3}{2}}) (\lambda + 2(n-1)^{\frac{3}{2}}) = 0$$

and spectrum is

$$\text{Spec}_{RA}(S_n^0) = \begin{pmatrix} 2(n-1)^{\frac{3}{2}} & -2(n-1)^{\frac{3}{2}} & 2\sqrt{n-1} & -2\sqrt{n-1} \\ 1 & 1 & n-1 & n-1 \end{pmatrix}.$$

Therefore,  $RAE(S_n^0) = 8(n-1)^{\frac{3}{2}}$ . ▷



**Theorem 3.4.** *The Randic type additive connectivity energy of complete bipartite graph  $K_{m,n}$  of order  $2n$  with vertex set  $\{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$  is*

$$RAE(K_{m,n}) = 2(\sqrt{mn})(\sqrt{m} + \sqrt{n}).$$

◁ Let  $K_{m,n}$  be the complete bipartite graph of order  $2n$  with vertex set  $\{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . The Randic type additive connectivity matrix is

$$R^D(K_{m,n}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{m} + \sqrt{n} & \sqrt{m} + \sqrt{n} & \sqrt{m} + \sqrt{n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{m} + \sqrt{n} & \sqrt{m} + \sqrt{n} & \sqrt{m} + \sqrt{n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{m} + \sqrt{n} & \sqrt{m} + \sqrt{n} & \sqrt{m} + \sqrt{n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{m} + \sqrt{n} & \sqrt{m} + \sqrt{n} & \sqrt{m} + \sqrt{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{m} + \sqrt{n} & \sqrt{m} + \sqrt{n} & \sqrt{m} + \sqrt{n} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{m} + \sqrt{n} & \sqrt{m} + \sqrt{n} & \sqrt{m} + \sqrt{n} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{m} + \sqrt{n} & \sqrt{m} + \sqrt{n} & \sqrt{m} + \sqrt{n} & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hence, the characteristic equation is

$$\lambda^{n-2}[\lambda - (\sqrt{mn})(\sqrt{m} + \sqrt{n})][\lambda + (\sqrt{mn})(\sqrt{m} + \sqrt{n})] = 0.$$

Hence, spectrum is

$$\text{Spec}_{RA}(K_{m,n}) = \left( \begin{array}{ccc} (\sqrt{mn})(\sqrt{m} + \sqrt{n}) & 0 & -(\sqrt{mn})(\sqrt{m} + \sqrt{n}) \\ 1 & m + n - 2 & 1 \end{array} \right).$$

Therefore,  $RAE(K_{m,n}) = 2(\sqrt{mn})(\sqrt{m} + \sqrt{n})$ . ▷

**Theorem 3.5.** *The Randic type additive connectivity energy of Cocktail party graph  $K_{n \times 2}$  is*

$$RAE(K_{n \times 2}) = \frac{4n - 6}{n - 1}.$$

◁ Let  $K_{n \times 2}$  be a Cocktail party graph of order  $2n$  with vertex set  $\{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . The Randic type additive connectivity matrix is

$$RA(K_{n \times 2}) = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2n-2} & 2\sqrt{2n-2} & \dots & 0 & 2\sqrt{2n-2} & 2\sqrt{2n-2} & 2\sqrt{2n-2} \\ 2\sqrt{2n-2} & 0 & 2\sqrt{2n-2} & \dots & 2\sqrt{2n-2} & 0 & 2\sqrt{2n-2} & 2\sqrt{2n-2} \\ 2\sqrt{2n-2} & 2\sqrt{2n-2} & 0 & \dots & 2\sqrt{2n-2} & 2\sqrt{2n-2} & 0 & 2\sqrt{2n-2} \\ 2\sqrt{2n-2} & 2\sqrt{2n-2} & 2\sqrt{2n-2} & \dots & 2\sqrt{2n-2} & 2\sqrt{2n-2} & 2\sqrt{2n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2\sqrt{2n-2} & 2\sqrt{2n-2} & \dots & 0 & 2\sqrt{2n-2} & 2\sqrt{2n-2} & 2\sqrt{2n-2} \\ 2\sqrt{2n-2} & 0 & 2\sqrt{2n-2} & \dots & 2\sqrt{2n-2} & 0 & 2\sqrt{2n-2} & 2\sqrt{2n-2} \\ 2\sqrt{2n-2} & 2\sqrt{2n-2} & 0 & \dots & 2\sqrt{2n-2} & 2\sqrt{2n-2} & 0 & 2\sqrt{2n-2} \\ 2\sqrt{2n-2} & 2\sqrt{2n-2} & 2\sqrt{2n-2} & \dots & 2\sqrt{2n-2} & 2\sqrt{2n-2} & 2\sqrt{2n-2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Hence, the characteristic equation is

$$\lambda^n(\lambda + 4\sqrt{2n-2})^{n-1}(\lambda - 4(n-1)\sqrt{2n-2}) = 0$$

and the spectrum is

$$\text{Spec}_{RA}(K_{n \times 2}) = \left( \begin{array}{ccc} 4(n-1)\sqrt{2n-2} & 0 & -4\sqrt{2n-2} \\ 1 & n & n-1 \end{array} \right).$$

Therefore,  $RAE(K_{n \times 2}) = 8(n-1)\sqrt{2n-2}$ . ▷

#### 4. Randic type additive connectivity energy of complements

DEFINITION 4.1 [5]. Let  $G$  be a graph and  $P_k = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  be a partition of its vertex set  $V$ . Then the  $k$ -complement of  $G$  is denoted by  $(G)_k$  and obtained as follows: For all  $V_i$  and  $V_j$  in  $P_k$ ,  $i \neq j$ , remove the edges between  $V_i$  and  $V_j$  and add the edges between the vertices of  $V_i$  and  $V_j$  which are not in  $G$ .

DEFINITION 4.2 [5]. Let  $G$  be a graph and  $P_k = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  be a partition of its vertex set  $V$ . Then the  $k(i)$ -complement of  $G$  is denoted by  $(G)_{k(i)}$  and obtained as follows: For each set  $V_r$  in  $P_k$ , remove the edges of  $G$  joining the vertices within  $V_r$  and add the edges of  $\overline{G}$  (complement of  $G$ ) joining the vertices of  $V_r$ .

Here we investigate the relation between some special graph classes and their complements in terms of the Randic type additive connectivity energy.

**Theorem 4.1.** *The Randic type additive connectivity energy of the complement  $\overline{K_n}$  of the complete graph  $K_n$  is*

$$RAE(\overline{K_n}) = 0.$$

◁ Let  $K_n$  be the complete graph with vertex set  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . The Randic type additive connectivity matrix of the complement of the complete graph  $K_n$  is

$$RA(\overline{K_n}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Characteristic polynomial is

$$RA(\overline{K_n}) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{vmatrix}.$$

Clearly, the characteristic equation is  $\lambda^n = 0$  implying

$$RAE(\overline{K_n}) = 0. \triangleright$$

**Theorem 4.2.** *The Randic type additive connectivity energy of the complement  $\overline{K_{n \times 2}}$  of the cocktail party graph  $K_{n \times 2}$  of order  $2n$  is*

$$RAE(\overline{K_{n \times 2}}) = 4n.$$

◁ Let  $K_{n \times 2}$  be the cocktail party graph of order  $2n$  having the vertex set  $\{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . The corresponding Randic type additive connectivity matrix

is

$$RA(\overline{K_{n \times 2}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Characteristic polynomial is

$$RA(\overline{K_{n \times 2}}) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -2 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

and the characteristic equation becomes

$$(\lambda + 2)^n(\lambda - 2)^n = 0$$

implying that the spectrum would be

$$\text{Spec}_{RA}(\overline{K_{n \times 2}}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ n & n \end{pmatrix}.$$

Therefore,

$$RAE(\overline{K_{n \times 2}}) = 4n. \triangleright$$

**Acknowledgement.** The authors are thankful to the anonymous referee for valuable suggestions and comments for the improvement of the paper.

### References

1. Gutman, I. The Energy of a Graph, *Ber. Math. Stat. Sect. Forschungsz. Graz*, 1978, vol. 103, pp. 1–22.
2. Gutman, I. The Energy of a Graph: Old and New Results, *Algebraic Combinatorics and its Applications* / eds. Betten, A., et al., Berlin, Springer-Verlag, 2001, pp. 196–211.
3. Prakasha, K. N., Siva Kota Reddy, P. and Cangül, I. N. Minimum Covering Randic Energy of a Graph, *Kyungpook Math. J.*, 2017, vol. 57, no. 4, pp. 701–709.
4. Siva Kota Reddy, P., Prakasha, K. N. and Siddalingaswamy, V. M. Minimum Dominating Randic Energy of a Graph, *Vladikavkaz. Mat. J.*, vol. 19, no. 1, pp. 28–35. DOI 10.23671/VNC.2017.2.6506.
5. Sampathkumar, E., Pushpalatha, L., Venkatachalam, C. V. and Pradeep Bhat, Generalized Complements of a Graph, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 1998, vol. 29, no. 6, pp. 625–639.

Received September 7, 2018

KRISHNARAJAPETE VENKATARAMA MADHUSUDHAN  
ATME College of Engineering,  
Mysore 570 028, Karnataka, India,  
Assistant Professor  
E-mail: kvmadhu13@gmail.com;

POLAEFALLI SIVA KOTA REDDY  
Siddaganga Institute of Technology,  
B. H. Road, Tumkur 572 103, Karnataka, India,  
Associate Professor  
E-mail: reddy\_math@yahoo.com, pskreddy@sit.ac.in;

KARPENAHALLI RANGANATHAPPA RAJANNA  
Acharya Institute of Technology,  
Bangalore 560 107, Karnataka, India,  
Professor and Head of Mathematics  
E-mail: rajanna@acharya.ac.in

Владикавказский математический журнал  
2019, Том 21, Выпуск 2, С. 18–26

## ЭНЕРГИЯ АДДИТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ ТИПА РАНДИКА ГРАФА

К. В. Мадхусудхан<sup>1</sup>, П. Сива Кота Редди<sup>2</sup>, К. Р. Раджанна<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Инженерный колледж, Майсур 570 028, Карнатака, Индия;

<sup>2</sup> Сиддаганга технологический институт, Тумкур 572 103, Карнатака, Индия;

<sup>3</sup> Технологический институт Ачарьи, Бангалор 560 107, Карнатака, Индия

E-mail: kvmadhu13@gmail.com; reddy\_math@yahoo.com, pskreddy@sit.ac.in; rajanna@acharya.ac.in

**Аннотация.** Матрица аддитивной связности типа Рандика  $RA(G) = (R_{ij})_{n \times m}$  задается равенствами  $R_{ij} = \sqrt{d_i} + \sqrt{d_j}$ , если вершины  $v_i$  и  $v_j$  смежны,  $R_{ij} = 0$ , в противном случае, где  $d_i$  и  $d_j$  — степени вершин  $v_i$  и  $v_j$  соответственно. Целью данной статьи является исследование энергии аддитивной связности типа Рандика. В данной статье мы получили новые неравенства, включающие энергию аддитивной связности типа Рандика, и представили ее верхнюю и нижнюю границы. Мы также получили результаты по энергии аддитивной связности типа Рандика обобщенных дополнений графа.

**Ключевые слова:** энергия аддитивной связности типа Рандика, собственные значения аддитивной связности типа Рандика.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 05C50.

**Образец цитирования:** Madhusudhan K. V., Reddy P. S. K. and Rajanna K. R. Randic Type Additive Connectivity Energy of a Graph // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, № 2.—С. 18–26 (in English). DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32113.

УДК 519.17

DOI 10.23671/VNC.2019.2.32115

О ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОМ ГРАФЕ  
С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ  $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ <sup>#</sup>

А. А. Махнев<sup>1,2</sup>, А. А. Токбаева<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,  
Россия, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;

<sup>2</sup> Уральский федеральный университет,  
Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19;

<sup>3</sup> Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,  
Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173

E-mail: makhnev@imm.uran.ru, tok2506@mail.ru

**Аннотация.** Доказано, что для дистанционно регулярного графа  $\Gamma$  диаметра 3 с собственным значением  $\theta_2 = -1$  дополнительный граф для  $\Gamma_3$  является псевдогеометрическим для  $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$ . Банг и Кулен изучали дистанционно регулярные графы с массивами пересечений  $(t+1)s, ts, (s+1-\psi); 1, 2, (t+1)\psi$ . При  $t = 4, s = 7, \psi = 6$  получим массив  $35, 28, 6; 1, 2, 30$ . Дистанционно регулярный граф  $\Gamma$  с массивом пересечений  $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$  имеет спектр  $35^1, 9^{168}, -1^{182}, -5^{273}$ ,  $v = 1 + 35 + 490 + 98 = 624$  вершин, и  $\bar{\Gamma}_3$  является псевдогеометрическим графом для  $pG_{30}(35, 14)$ . Ввиду границы Дельсарта порядок клики в  $\Gamma$  не больше 8. Доказано, что либо окрестность любой вершины в  $\Gamma$  является объединением изолированных 7-клик, либо окрестность любой вершины в  $\Gamma$  не содержит 7-клик и является связным графом. Изучено строение группы  $G$  автоморфизмов графа  $\Gamma$  с массивом пересечений  $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ . В частности,  $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13\}$  и реберно симметричный граф  $\Gamma$  имеет разрешимую группу автоморфизмов.

**Ключевые слова:** дистанционно регулярный граф, клика Дельсарта, геометрический граф.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 20D45.

**Образец цитирования:** Махнев А. А., Токбаева А. А. О дистанционно регулярном графе с массивом пересечений  $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$  // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 2.—С. 27–37. DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32115.

## 1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если  $a, b$  — вершины графа  $\Gamma$ , то через  $d(a, b)$  обозначается расстояние между  $a$  и  $b$ , а через  $\Gamma_i(a)$  — подграф графа  $\Gamma$ , индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии  $i$  в  $\Gamma$  от вершины  $a$ . Подграф  $\Gamma_1(a)$  называется *окрестностью вершины  $a$*  и обозначается через  $[a]$ .

Если вершины  $u, w$  находятся на расстоянии  $i$  в  $\Gamma$ , то через  $b_i(u, w)$  (через  $c_i(u, w)$ ) обозначим число вершин в пересечении  $\Gamma_{i+1}(u)$  (в пересечении  $\Gamma_{i-1}(u)$ )

---

<sup>#</sup>Работа выполнена при поддержке соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006.

© 2019 Махнев А. А., Токбаева А. А.

с  $[w]$ . Граф диаметра  $d$  называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений*  $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$ , если значения  $b_i(u, w)$  и  $c_i(u, w)$  не зависят от выбора вершин  $u, w$  на расстоянии  $i$  (см. [1]). Положим  $a_i = k - b_i - c_i$  и  $k_i = |\Gamma_i(u)|$  (значение  $k_i$  не зависит от выбора вершины  $u$ ). Пусть  $\Gamma$  — граф диаметра  $d$ ,  $2 \leq i \leq d$ . Тогда граф  $\Gamma_i$  имеет то же множество вершин, что и  $\Gamma$ , и вершины  $u, w$  смежны в  $\Gamma_i$  тогда и только тогда, когда расстояние между ними в  $\Gamma$  равно  $i$ .

Порядок клики в дистанционно регулярном графе степени  $k$ , имеющем наименьшее собственное значение  $-m$ , не больше  $1 + k/m$ . Клика  $K$  с  $1 + k/m$  вершинами называется *кликкой Дельсарта*. Дистанционно регулярный граф называется *геометрическим*, если он содержит такое семейство  $S$  клик Дельсарта, что каждое ребро графа содержится в единственной клике из  $S$ .

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *частичным пространством прямых*, если любые две точки лежат не более чем на одной прямой.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется  $\alpha$ -*частичной геометрией порядка*  $(s, t)$ , если каждая прямая содержит  $s + 1$  точку, каждая точка лежит на  $t + 1$  прямой (прямые пересекаются не более, чем в одной точке) и для любой точки  $a$ , не лежащей на прямой  $L$ , найдется точно  $\alpha$  прямых, проходящих через  $a$  и пересекающих  $L$  (обозначение  $pG_\alpha(s, t)$ ).

*Точечным графом* геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии  $pG_\alpha(s, t)$  сильно регулярен с параметрами:  $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$ ,  $k = s(t + 1)$ ,  $\lambda = (s - 1) + (\alpha - 1)t$ ,  $\mu = \alpha(t + 1)$ . Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры, называется *псевдогеометрическим графом для*  $pG_\alpha(s, t)$ .

Пусть  $\Gamma$  — дистанционно регулярный граф с  $c_2 = 2$ ,  $\Delta$  — окрестность вершины  $a$  в  $\Gamma$ . Тогда любые две несмежные вершины из  $\Delta$  имеют в  $\Delta$  не более одного общего соседа, поэтому любое ребро из  $\Delta$  лежит в единственной максимальной клике из  $\Delta$  и  $\Delta$  — граф коллинеарности частичного пространства прямых, имеющий обхват по крайней мере 5. Далее,  $\Delta$  — регулярный граф степени  $a_1$  на  $k$  вершинах. Броувер и Ноймайер [2; теорема 1.1] получили следующее утверждение.

**Предложение 1.1.** *Связное частичное пространство прямых обхвата по крайней мере 5, имеющего более чем одну прямую, в котором каждая точка имеет  $\lambda$  соседей, содержит  $k \geq \lambda(\lambda + 3)/2$  точек. Равенство выполняется только в случае  $k = 5$ ,  $\lambda = 2$ .*

Дистанционно регулярный граф  $\Gamma$  с массивом пересечений  $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$  имеет спектр  $35^1, 9^{168}, -1^{182}, -5^{273}$ ,  $v = 1 + 35 + 490 + 98 = 624$  вершин, и  $\bar{\Gamma}_3$  является псевдогеометрическим графом для  $pG_{30}(35, 14)$ . Ввиду границы Дельсарта порядок клики в  $\Gamma$  не больше 8.

В данной работе исследуются свойства дистанционно регулярного графа  $\Gamma$  с массивом пересечений  $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ . В [3] изучается класс графов  $G(s, t, \psi)$  с массивом пересечений  $\{(t + 1)s, ts, (t - 1)(s + 1 - \psi); 1, 2, (t + 1)\psi\}$  (наш массив получается при  $t = 4$ ,  $s = 7$ ,  $\psi = 6$ ).

## 2. Доказательство теоремы 2.1

**Теорема 2.1.** *Пусть  $\Gamma$  является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений  $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ . Тогда либо  $\Gamma$  — геометрический граф, либо окрестность любой вершины в  $\Gamma$  не содержит 7-клик и является связным графом.*

В этом параграфе предполагается, что дистанционно регулярный граф  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ , и окрестность вершины  $a$  в графе  $\Gamma$  не является объединением пяти изолированных 7-клик. Так как  $a_1 = 6$ ,  $c_2 = 2$ , то  $\Delta = [a]$  является регулярным графом степени 6 на 35 вершинах. Максимальную клику  $C$  из  $\Delta$  с  $|C| = i$  назовем  $i$ -прямой. Фиксируем вершину  $b \in \Delta$  и пусть число  $i$ -прямых, проходящих через  $b$ , равно  $x_i$ .

**Лемма 2.1.** Для вершины  $b$  выполняется одно из следующих утверждений:

- (1)  $x_2 = 4$ ,  $x_3 = 1$  и  $|\Delta_2(b)| = 28$ ;
- (2)  $x_2 = 3$ ,  $x_4 = 1$  и  $|\Delta_2(b)| = 24$ ;
- (3)  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 2$  и  $|\Delta_2(b)| = 26$ ;
- (4)  $x_2 = 2$ ,  $x_5 = 1$  и  $|\Delta_2(b)| = 18$ ;
- (5)  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = x_4 = 1$  и  $|\Delta_2(b)| = 22$ ;
- (6)  $x_2 = 1$ ,  $x_6 = 1$  и  $|\Delta_2(b)| = 10$ ;
- (7)  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 3$  и  $|\Delta_2(b)| = 24$ ;
- (8)  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = x_5 = 1$  и  $|\Delta_2(b)| = 16$ ;
- (9)  $x_2 = 0$ ,  $x_4 = 2$  и  $|\Delta_2(b)| = 18$ ;
- (10)  $x_2 = 0$ ,  $x_7 = 1$  и  $|\Delta_2(b)| = 0$ .

◁ Если  $x_2 = 6$ , то  $|\Delta_2(b)| = 30$ , противоречие.

Если  $x_2 = 4$ , то  $x_3 = 1$  и  $|\Delta_2(b)| = 28$ .

Если  $x_2 = 3$ , то  $x_4 = 1$  и  $|\Delta_2(b)| = 24$ .

Если  $x_2 = 2$ , то либо  $x_3 = 2$  и  $|\Delta_2(b)| = 26$ , либо  $x_5 = 1$  и  $|\Delta_2(b)| = 20$ .

Если  $x_2 = 1$ , то либо  $x_3 = x_4 = 1$  и  $|\Delta_2(b)| = 22$ , либо  $x_6 = 1$  и  $|\Delta_2(b)| = 10$ .

Если  $x_2 = 0$ , то либо  $x_3 = 3$  и  $|\Delta_2(b)| = 24$ , либо  $x_3 = x_5 = 1$  и  $|\Delta_2(b)| = 16$ , либо  $x_4 = 2$  и  $|\Delta_2(b)| = 18$ , либо  $x_7 = 1$  и  $|\Delta_2(b)| = 0$ . ▷

**Лемма 2.2.** Пусть  $y_i$  — число вершин, лежащих на  $(i)$ -прямых из  $\Delta$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ ,  $z_j$  — число  $j$ -прямых в  $\Delta$ ,  $j \in \{2, 3, \dots, 6\}$ . Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1)  $y_1 + y_2 + \dots + y_{10} = 35$ ;
- (2)  $z_6 = y_6/6$  и  $z_5 = (y_4 + y_8)/5$ ;
- (3)  $z_4 = (y_2 + y_5 + 2y_9)/4$  и  $z_3 = (y_1 + 2y_3 + y_5 + 3y_7)/3$ ;
- (4)  $z_2 = (4y_1 + 2y_3 + 2y_4 + y_5 + y_6)/2$ .

◁ Все утверждения леммы следуют из леммы 2.1. ▷

По лемме 2.2 число  $y_6$  делится на 6, по утверждению (4) леммы 2.2 число  $y_5$  четно и по утверждению (3) леммы 2.2 число  $y_2$  четно.

**Лемма 2.3.** Пусть  $K$  является кликой в  $\Delta$  и  $|K| = i$ . Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) если  $i = 6$ , то  $\Delta$  содержит 6 вершин, смежных с вершинами из  $K$  и индуцирующих клику;

(2) если  $i = 5$ , то  $\Delta$  содержит 5 пар вершин, смежных с вершинами из  $K$ , и вершины из разных пар не смежны.

◁ Пусть  $i = 6$ . Тогда  $\Delta$  содержит 6 вершин, смежных с вершинами из  $K$ . Если две из этих вершин смежны, то  $\Delta$  содержит четырехугольник, противоречие.

Пусть  $i = 5$ . Тогда  $\Delta$  содержит 5 пар вершин, смежных с вершинами из  $K$ . Если некоторые вершины из разных пар смежны, то  $\Delta$  содержит четырехугольник, противоречие. ▷

**Лемма 2.4.** Имеем  $y_{10} = 0$ .

◁ Допустим, что  $b$  лежит на 7-прямой  $K$ . Ввиду предложения 1.1 граф  $\Delta^0 = \Delta - K$  связан, поэтому  $y_{10} = 7$ . Далее, для любой вершины  $c \in \Delta^0$  имеем  $|\Delta_2(c)| \leq 21$ , поэтому  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$  и  $y_5 = y_7 = 0$ . По лемме 2.2 получим  $y_4 + y_6 + y_8 + y_9 = 28$ ,  $z_6 = y_6/6$ ,  $z_5 = (y_4 + y_8)/5$ ,  $z_3 = 0$ ,  $z_4 = y_9/2$  и  $z_2 = (2y_4 + y_6)/2$ .

Если  $\Delta^0$  содержит максимальную 5-клику  $L$ , то ввиду леммы 2.1 и равенства  $z_3 = 0$  подграф  $\Delta^0$  содержит 5 пар вершин, смежных с вершинами из  $L$ , индуцирующими 10-коклик, противоречие с предложением 1.1, примененным к  $\Delta^0$ . Значит,  $y_4 = y_8 = 0$ . Противоречие с тем, что  $\Delta^0$  является несвязным графом с компонентами, индуцированными вершинами типа  $y_6$  и  $y_9$ . ▷

Из лемм 2.1–2.4 следует теорема 2.1.

**Лемма 2.5.** Пусть  $\Gamma$  является реберно симметричным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений  $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ . Тогда либо  $\Gamma$  является геометрическим, либо окрестность любой вершины является вполне регулярным графом с параметрами  $(35, 6, 1, 1)$ .

◁ Пусть  $G = \text{Aut}(\Gamma)$  и  $a$  — вершина графа  $\Gamma$ . Тогда  $G_a$  действует транзитивно на  $[a]$ .

Пусть  $\Delta = [a]$  не является объединением изолированных 7-клик и  $y_i$  — число вершин типа  $(i)$  из  $\Delta$ . Тогда  $y_i = 35$  для некоторого  $i$ .

По лемме 2.2 имеем  $z_6 = y_6/6$ ,  $z_5 = (y_4 + y_8)/5$ ,  $z_4 = (y_2 + y_5 + 2y_9)/4$ ,  $z_3 = (y_1 + 2y_3 + y_5 + 3y_7)/3$  и  $z_2 = (4y_1 + 2y_3 + 2y_4 + y_5 + y_6)/2$ .

Если  $i = 1$ , то  $z_4 = z_5 = z_6 = 0$  и  $z_3 = 35/3$ , противоречие.

Если  $i = 2$ , то  $z_5 = z_6 = 0$  и  $z_4 = 35/4$ , противоречие.

Если  $i = 3$ , то  $z_4 = z_5 = z_6 = 0$  и  $z_3 = 70/3$ , противоречие.

Если  $i = 4$ , то  $z_3 = z_4 = z_6 = 0$ ,  $z_5 = 7$  и  $z_2 = 35$ . В этом случае имеем разбиение  $\Delta$  семью 5-кликами. Пусть  $K$  является 5-кликой из  $\Delta$ . Тогда вершины из  $K$  имеют 10 соседей вне  $K$ . Две из этих 10 вершин попадают в 5-клику  $K'$ , противоречие с тем, что  $K \cup K'$  содержит четырехугольник, противоречие.

Если  $i = 5$ , то  $z_5 = z_6 = 0$  и  $z_4 = 35/4$ , противоречие.

Если  $i = 6$ , то  $z_6 = 35/6$ , противоречие.

Если  $i = 7$ , то  $z_3 = 35$  и  $z_i = 0$  для  $i \neq 3$ . В этом случае  $\Delta$  является вполне регулярным графом с параметрами  $(35, 6, 1, 1)$ .

Если  $i = 8$ , то  $z_2 = z_3 = z_4 = z_6 = 0$  и  $z_5 = 7$ . Снова имеем разбиение  $\Delta$  семью 5-кликами, противоречие как и выше.

Если  $i = 9$ , то  $z_4 = 70/4$ , противоречие. ▷

### 3. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$

**Теорема 3.1.** Пусть  $\Gamma$  является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений  $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ ,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $g$  — элемент простого порядка  $p$  из  $G$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . Тогда  $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13\}$  и выполняется одно из следующих утверждений:

(1)  $\Omega$  — пустой граф, либо  $p = 2$ ,  $\alpha_3(g) = 40s + 24$  и  $\alpha_1(g) = 8s - 4 + 28t$ , либо  $p = 3$ ,  $\alpha_3(g) = 60l + 24$  и  $\alpha_1(g) = 42t + 12l + 24$ , либо  $p = 13$ ,  $\alpha_3(g) = 260s + 104$  и  $\alpha_1(g) = 52s + 26 + 182t$ ;

(2)  $\Omega$  является  $n$ -кликой, либо  $p = 7$ ,  $n = 1, 8$ ,  $\alpha_3(g) = 140l + 104 - 6n$ ,  $\alpha_1(g) = 98t + 40 - 5n$ , либо  $p = 2$ ,  $n \in \{2, 4, 6\}$ ,  $\alpha_3(g) = 104 + 40s - 6n$  и  $\alpha_1(g) = 8s + 40 - 5n + 28t$ ;

(3)  $\Omega$  является  $m$ -коклик,  $m > 1$ , вершины из  $\Omega$  находятся на расстоянии 3 в  $\Gamma$  и либо  $p = 5$ ,  $m \in \{4, 9, 14\}$ ,  $\alpha_3(g) = -6m + 100s + 44$  и  $\alpha_1(g) = -5m + 20s + 70t$ , либо  $p = 7$ ,  $m \in \{8, 15\}$ ,  $\alpha_3(g) = -6m + 140s - 36$  и  $\alpha_1(g) = -5m + 28s + 98t + 12$ ;



(4)  $\Omega$  содержит ребро и является объединением по крайней мере двух изолированных клик,  $p = 2$  и  $|\Omega| \leq 18$ ;

(5)  $\Omega$  содержит геодезический 2-путь и  $p \leq 5$ .

В этом параграфе будем предполагать, что  $\Gamma$  является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений  $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$  и  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ .

**Лемма 3.1.** Граф  $\Gamma_3$  является сильно регулярным с параметрами  $(624, 98, 22, 14)$  и  $\Gamma$  имеет следующие ненулевые числа пересечений:

- (1)  $p_{11}^1 = 6, p_{21}^1 = 28, p_{22}^1 = 378, p_{23}^1 = 84, p_{33}^1 = 14$ ;
- (2)  $p_{11}^2 = 2, p_{12}^2 = 27, p_{13}^2 = 6, p_{22}^2 = 384, p_{23}^2 = 78, p_{33}^2 = 14$ ;
- (3)  $p_{12}^3 = 30, p_{22}^3 = 390, p_{13}^3 = 5, p_{23}^3 = 70$  и  $p_{33}^3 = 22$ .

$\triangleleft$  Напомним, что для вершин  $u, w$ , находящихся на расстоянии  $l$ , через  $p_{ij}^l$  обозначается число вершин  $z$  с  $d(u, z) = i$  и  $d(z, w) = j$ . Заметим, что  $p_{12}^2 = a_2, p_{13}^3 = a_3$ . По лемме 4.1.7 из [1] получим

$$\begin{aligned} p_{ii-1}^1 &= c_i k_i / k, p_{ii}^1 = a_i k_i / k, p_{ii+1}^1 = b_i k_i / k, \\ p_{i-22}^i &= c_{i-1} c_i / \mu, p_{i+12}^{i-1} = b_{i-1} b_i / \mu, p_{i-1i+1}^i = k_i c_i b_i / (k b_1), \\ p_{i2}^{i-1} &= b_{i-1} (a_i + a_{i-1} - a_1) / \mu, p_{i2}^{i+1} = c_{i+1} (a_i + a_{i+1} - a_1) / \mu. \end{aligned}$$

Имеем  $a_1 = 6, a_2 = 29$  и  $a_3 = 5$ . Далее,  $k_1 = 35, k_2 = 490$  и  $k_3 = 98$ . Поэтому  $p_{21}^1 = b_1 = 28$  и  $p_{32}^1 = c_3 k_3 / k = 84$ .

Аналогично  $p_{11}^1 = a_1 = 6, p_{22}^1 = a_2 k_2 / k = 378$  и  $p_{33}^1 = a_3 k_3 / k = 14$ .

Далее,  $p_{12}^2 = c_3 = 30, p_{13}^2 = b_2 = 6, p_{22}^2 = p_{12}^3 (a_2 + a_3 - a_1) / \mu = 390$  и  $p_{32}^2 = b_2 (a_3 + a_2 - a_1) / \mu = 78$ . Поэтому  $p_{23}^2 = 20 - p_{23}^3 - p_{13}^2 = 14$ .

Снова по лемме 4.1.7 из [1] получим  $p_{22}^2 = (p_{11}^2 b_1 + p_{12}^2 (a_2 - a_1) + p_{13}^2 c_3 - p_{02}^2 b_0) / \mu = 384, p_{23}^3 = 70$  и  $p_{33}^3 = 22$ .

Теперь граф  $\Gamma_3$  является сильно регулярным с параметрами  $(624, 98, 22, 14)$ .  $\triangleright$

Доказательство теоремы 3.1 опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Кэмерона [4]. При этом графу  $\Gamma$  диаметра  $d$  на  $n$  вершинах отвечает симметричная схема отношений  $(X, \mathcal{R})$  с  $d$  классами, где  $X$  — множество вершин графа,  $R_0$  — отношение равенства на  $X$ , и для  $i \leq 1$  класс  $R_i$  состоит из пар  $(u, w)$  таких, что  $d(u, w) = i$ . Для  $u \in \Gamma$  положим  $k_i = |\Gamma_i(u)|$ . Классу  $R_i$  отвечает граф  $\Gamma_i$  на множестве вершин  $X$ , в котором вершины  $u, w$  смежны, если  $(u, w) \in R_i$ . Пусть  $A_i$  — матрица смежности графа  $\Gamma_i$  для  $i > 0$  и  $A_0 = I$  — единичная матрица. Тогда  $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_l$  для чисел пересечений  $p_{ij}^l$ .

Пусть  $P_i$  — матрица, в которой на месте  $(j, l)$  стоит  $p_{ij}^l$ . Тогда собственные значения  $k = p_1(0), \dots, p_1(d)$  матрицы  $P_1$  являются собственными значениями графа  $\Gamma$  кратностей  $m_0 = 1, \dots, m_d$ . Матрицы  $P$  и  $Q$ , у которых на месте  $(i, j)$  стоят  $p_j(i)$  и  $q_j(i) = m_j p_i(j) / n_i$  соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством  $PQ = QP = |X|I$ , где  $I$  — единичная матрица порядка  $d + 1$ . Пусть  $u_j$  и  $w_j$  — левый и правый собственные векторы матрицы  $P_1$ , отвечающие собственному значению  $p_1(j)$  и имеющие первую координату 1. Тогда  $w_j$  являются столбцами матрицы  $P$  и  $m_j u_j$  являются строками матрицы  $Q$  [4, теорема 17.12].

Подстановочное представление группы  $G = \text{Aut}(\Gamma)$  на вершинах графа  $\Gamma$  обычным образом дает матричное представление  $\psi$  группы  $G$  в  $GL(v, \mathbb{C})$ . Пространство  $\mathbb{C}^v$  является ортогональной прямой суммой собственных подпространств  $W_0, \dots, W_d$  матрицы смежности  $A_1$  графа  $\Gamma$ . Для любого  $g \in G$  матрица  $\psi(g)$  перестановочна с  $A_1$ , поэтому подпространство  $W_i$  является  $\psi(G)$ -инвариантным. Пусть  $\chi_i$  — характер представления  $\psi_{W_i}$ . Тогда [4, § 3.7] для  $g \in G$  получим  $\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^d Q_{ij} \alpha_j(g)$ , где  $\alpha_j(g)$  — число точек  $x$  из  $X$  таких, что  $d(x, x^g) = j$ . Заметим, что значения характеров являются

целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для  $\chi_i(g)$  — число рациональное, то  $\chi_i(g)$  — целое число.

**Лемма 3.2.** Пусть  $g \in G$ ,  $\chi_1$  — характер проекции представления  $\psi$  на подпространство размерности 168,  $\chi_2$  — характер проекции представления  $\psi$  на подпространство размерности 182. Тогда  $\chi_1(g) = (19\alpha_0(g) + 5\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 96)/70$ ,  $\chi_2(g) = (6\alpha_0(g) + \alpha_3(g) - 104)/20$ , и числа  $\chi_1(g) - 168$ ,  $\chi_2(g) - 182$  делятся на  $p$ , если  $g$  — элемент простого порядка  $p$ .

◁ Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 168 & \frac{216}{5} & \frac{-48}{35} & \frac{-72}{7} \\ 182 & \frac{-26}{5} & \frac{-26}{5} & 26 \\ 273 & -39 & \frac{39}{7} & \frac{-117}{7} \end{pmatrix}.$$

Поэтому  $\chi_1(g) = (245\alpha_0(g) + 63\alpha_1(g) - 2\alpha_2(g) - 15\alpha_3(g))/910$ . Подставляя  $\alpha_2(g) = 624 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$ , получим  $\chi_1(g) = (19\alpha_0(g) + 5\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 96)/70$ .

Аналогично,  $\chi_2(g) = (35\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 5\alpha_3(g))/120$ . Подставляя  $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 624 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$ , получим  $\chi_2(g) = (6\alpha_0(g) + \alpha_3(g) - 104)/20$ .

Последнее утверждение следует из [5, лемма 2]. ▷

Выберем вершину  $a \in \Gamma$  и положим  $k_i = |\Gamma_i(a)|$ . Тогда  $k_2 = 490$  и  $k_3 = 98$ . Пусть  $g$  — элемент простого порядка  $p$  из  $G$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . По [6, теорема 3.2] имеем  $|\Omega| \leq 624 \cdot 22/84 = 163$ .

**Лемма 3.3.** Выполняются следующие утверждения:

(1) если  $\Omega$  — пустой граф, то либо  $p = 2$ ,  $\alpha_3(g) = 40s + 24$  и  $\alpha_1(g) = 8s - 4 + 28t$ , либо  $p = 3$ ,  $\alpha_3(g) = 60l + 24$  и  $\alpha_1(g) = 42t + 12l + 24$ , либо  $p = 13$ ,  $\alpha_3(g) = 260s + 104$  и  $\alpha_1(g) = 52s + 26 + 182t$ ;

(2) если  $\Omega$  является  $n$ -кликкой, то либо  $p = 7$ ,  $n = 1, 8$ ,  $\alpha_3(g) = 140l + 104 - 6n$ ,  $\alpha_1(g) = 98t + 40 - 5n$ , либо  $p = 2$ ,  $n \in \{2, 4, 6\}$ ,  $\alpha_3(g) = 104 + 40s - 6n$  и  $\alpha_1(g) = 8s + 40 - 5n + 28t$ ;

(3) если  $\Omega$  является  $m$ -коккликкой,  $m > 1$ , то  $p = 5$ ,  $m \in \{4, 9, 14\}$ ,  $\alpha_3(g) = -6m + 100s + 44$  и  $\alpha_1(g) = -5m + 20s + 70t$  или  $p = 7$ ,  $m \in \{8, 15\}$ ,  $\alpha_3(g) = -6m + 140s - 36$  и  $\alpha_1(g) = -5m + 28s + 98t + 12$ ;

(4) если  $\Omega$  содержит ребро и является объединением изолированных клик, то  $p = 2$  и  $|\Omega| \leq 18$ .

◁ Пусть  $\Omega$  — пустой граф. Так как  $v = 16 \cdot 39$ , то  $p$  равно 2, 3 или 13.

В случае  $p = 2$  число  $\chi_2(g) = (\alpha_3(g) - 104)/20$  четно и  $\alpha_3(g) = 40s + 24$ . Далее, число  $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 8s - 24)/14$  четно, поэтому  $\alpha_1(g) = 8s - 4 + 28t$ .

В случае  $p = 3$  число  $\chi_2(g) = (\alpha_3(g) - 104)/20$  сравнимо с 2 по модулю 3 и  $\alpha_3(g) = 60l + 24$ . Далее,  $\chi_1(g) = (5\alpha_1(g) - (60l + 24) - 96)/70 = (\alpha_1(g) - 12l - 24)/14$ , поэтому  $\alpha_1(g) = 42t + 12l + 24$ .

В случае  $p = 13$  число  $\chi_2(g) = (\alpha_3(g) - 104)/20$  делится на 13 и  $\alpha_3(g) = 260s + 104$ . Далее, число  $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 52s - 40)/14$  сравнимо с  $-1$  по модулю 13, поэтому  $\alpha_1(g) = 52s + 26 + 182t$ .

Пусть  $\Omega$  является  $n$ -кликкой. Если  $n = 1$ , то  $p$  делит 35 и 98, поэтому  $p = 7$ . Если  $n > 1$ , то для двух вершин  $a, b \in \Omega$  элемент  $g$  действует без неподвижных точек на  $[a] \cap [b] - \Omega$  и на  $[a] - b^\perp$ . Отсюда  $p$  делит  $8 - n$  и 28, поэтому либо  $p = 7$  и  $n = 8$ , либо  $p = 2$  и  $n \in \{2, 4, 6, 8\}$ .

Если  $p = 7$ , то  $\chi_2(g) = (6n + \alpha_3(g) - 104)/20$  и  $\alpha_3(g) = 140l + 104 - 6n$ , число  $\chi_1(g) = (19n + 5\alpha_1(g) - (140l + 104 - 6n) - 96)/70 = (\alpha_1(g) - 40 + 5n)/14$  делится на 7, поэтому  $\alpha_1(g) = 98t + 40 - 5n$ .

Если  $p = 2$ , то число  $\chi_2(g) = (6n + \alpha_3(g) - 104)/20$  четно, и  $\alpha_3(g) = 104 + 40s - 6n$ , число  $\chi_1(g) = (19n + 5\alpha_1(g) - (104 + 40s - 6n) - 96)/70 = (5n + \alpha_1(g) - 8s - 40)/14$  четно, поэтому  $\alpha_1(g) = 8s + 40 - 5n + 28t$ .

Пусть  $\Omega$  является  $m$ -кокликкой,  $m > 1$ . Если две вершины  $a, b \in \Omega$  находятся на расстоянии 2, то  $g$  действует без неподвижных точек на  $[a] \cap [b]$  и на  $[a]$ , поэтому  $p$  делит 2 и 35, противоречие. Значит, любые две вершины из  $\Omega$  находятся на расстоянии 3, и  $p$  делит 35 и  $99 - m$ , поэтому  $p \in \{5, 7\}$ . Заметим, что порядок клики в  $\Gamma_3$  не больше 17.

В случае  $p = 5$  имеем  $m \in \{4, 9, 14\}$ . Число  $\chi_2(g) = (6m + \alpha_3(g) - 104)/20$  сравнимо с 2 по модулю 5 и  $\alpha_3(g) = -6m + 100s + 44$ . Далее, число  $\chi_1(g) = (19m + 5\alpha_1(g) - (-6m + 100s + 44) - 96)/70 = (5m + \alpha_1(g) - 20s - 28)/14$  сравнимо с 3 по модулю 5, поэтому  $\alpha_1(g) = -5m + 20s + 70t$ .

В случае  $p = 7$  имеем  $m \in \{8, 15\}$ . Число  $\chi_2(g) = (6m + \alpha_3(g) - 104)/20$  делится на 7 и  $\alpha_3(g) = -6m + 140s - 36$ . Далее, число  $\chi_1(g) = (19m + 5\alpha_1(g) - (-6m + 140s - 36) - 96)/70 = (5m + \alpha_1(g) - 28s - 12)/14$  делится на 7, поэтому  $\alpha_1(g) = -5m + 28s + 98t + 12$ .

Пусть  $\Omega$  содержит ребро и является объединением изолированных клик. Так как  $p_{21}^1 = 28$ , то  $p = 2, 7$ . Если вершины из разных клик графа  $\Omega$  находятся на расстоянии 3 в  $\Gamma$ , то с учетом равенства  $p_{12}^3 = 30$  имеем  $p = 2$ . Далее,  $p_{13}^3 = 5$ , поэтому порядки максимальных клик в  $\Omega$  равны 2, 4 или 6. Наконец,  $p_{33}^1 = 14$ , поэтому  $|\Omega| \leq 18$ .

Пусть  $\Omega$  содержит две вершины  $a, b$  на расстоянии 2,  $[a] \cap [b] = \{u, u^g\}$ . Тогда  $p = 2$  и  $\Omega(a)$  содержит нечетное число вершин из  $\Gamma_2(b)$  и четное число вершин из  $\Gamma_3(b)$ . Если  $\Omega(a)$  содержит две вершины  $c, d$  из  $\Gamma_3(b)$ , то  $[c] \cap [u] = \{a, e\} = [c] \cap [u^g]$  для некоторой вершины  $e \in \Omega$ , а степень  $b$  в  $\Omega$  не больше 5. В этом случае  $|\Omega| \leq 18$ .

Если же  $\Omega(a)$  не пересекает  $\Gamma_3(b)$  и  $\Omega(b)$  не пересекает  $\Gamma_3(a)$ , то  $[u] \cap [u^g]$  содержит не более 6 вершин из  $\Omega$ . Для вершины  $c \in \Omega(a) - [u]$  подграф  $[c] \cap [u]$  содержит две вершины из  $\Omega$  и  $[c] \cap [b] = \{w, w^g\}$ . Поэтому  $|\Omega(a) - [u]| \leq 4$ , степени вершин  $a, b$  в  $\Omega$  не больше 5 и снова  $|\Omega| \leq 18$ .

- (1)  $p_{11}^1 = 6, p_{21}^1 = 28, p_{22}^1 = 378, p_{23}^1 = 84, p_{33}^1 = 14$ ;
- (2)  $p_{11}^2 = 2, p_{12}^2 = 27, p_{13}^2 = 6, p_{22}^2 = 384, p_{23}^2 = 78, p_{33}^2 = 14$ ;
- (3)  $p_{12}^3 = 30, p_{22}^3 = 390, p_{13}^3 = 5, p_{23}^3 = 70$  и  $p_{33}^3 = 22$ .  $\triangleright$

**Лемма 3.4.** Если  $[a] \subset \Omega$  для некоторой вершины  $a$ , то для любой вершины  $u \in \Gamma_2(a) - \Omega$  орбита  $u^{(g)}$  является кликой или кокликкой,  $p \leq 3$  и в случае  $a^\perp = \Omega$  либо  $p = 3, \alpha_3(g) = 60l - 72$  и  $\alpha_1(g) = 42t + 12l - 132$ , либо  $p = 2, \alpha_3(g) = 40l + 8$  и  $\alpha_1(g) = 28t + 8l - 116$ .

$\triangleleft$  Пусть  $[a] \subset \Omega$  для некоторой вершины  $a$ . Тогда для любой вершины  $u \in \Gamma_2(a) - \Omega$  орбита  $u^{(g)}$  не содержит геодезических 2-путей и является кликой или кокликкой. В любом случае подграф  $[a] \cap [u]$  является 2-кликкой и для двух вершин  $b, c \in [a] \cap [u]$  подграф  $[b] \cap [c]$  содержит  $a$  и  $p$  вершин из  $u^{(g)}$ , поэтому  $p \leq 5$ .

В случае  $p = 5$  подграф  $u^{(g)}$  является кликой, иначе  $[b] \cap [c]$  является 6-кокликкой, противоречие с леммой 2.1. Теперь граф  $\Delta = [b]$  содержит максимальную 6-кликку  $K = u^{(g)} \cup \{c\}$ ,  $\Delta(u^{g^i}) - K$  содержит единственную вершину  $d_i$  и по лемме 2.3 подграф  $\{d_1, \dots, d_5\}$  является кокликкой. Отсюда  $d_i \notin \Omega$  и  $\{d_1, \dots, d_5\}$  является  $\langle g \rangle$ -орбитой, противоречие. Итак,  $p \leq 3$ .

Пусть  $a^\perp = \Omega$ . Тогда  $\alpha_0(g) = 36$ . В случае  $p = 3$  число  $\chi_2(g) = (216 + \alpha_3(g) - 104)/20$  сравнимо с 2 по модулю 3 и  $\alpha_3(g) = 60l - 72$ . Далее,  $\chi_1(g) = (132 + \alpha_1(g) - 12l)/14$  и  $\alpha_1(g) = 42t + 12l - 132$ .

В случае  $p = 2$  число  $\chi_2(g) = (216 + \alpha_3(g) - 104)/20$  четно и  $\alpha_3(g) = 40l + 8$ . Далее, число  $\chi_1(g) = (116 + \alpha_1(g) - 8l)/14$  четно и  $\alpha_1(g) = 28t + 8l - 116$ .  $\triangleright$

**Лемма 3.5.** *Если  $\Omega$  содержит геодезический 2-путь  $b, a, c$ , то  $p \leq 5$ .*

$\triangleleft$  Пусть  $\Omega$  содержит геодезический 2-путь  $b, a, c$ . Если  $p > 7$ , то  $[a] \subset \Omega$ , противоречие с леммой 3.4.

Пусть  $p = 7$ . Тогда  $g$  фиксирует по 6 вершин из  $[a] \cap [b]$ ,  $[a] \cap [c]$  и вторую вершину  $e$  из  $[b] \cap [c]$ . Если  $[a]$  не является объединением пяти изолированных 7-клик, то ввиду теоремы 2.1 имеем  $[a] \subset \Omega$ , противоречие с леммой 3.4. Значит  $[a]$  является объединением пяти изолированных 7-клик. Аналогично каждый из графов  $[e]$ ,  $[b]$ ,  $[c]$  является объединением пяти изолированных 7-клик. Отсюда связная компонента  $\Delta$  графа  $\Omega$  — вполне регулярный граф с параметрами  $(v', 7s, 6, 2)$ . Если  $\Omega$  не является связным графом, то степень графа  $\Delta$  не больше 5, противоречие. Итак,  $\Delta = \Omega$ ,  $|\Omega| \leq 163$ , поэтому  $s = 2$ .

Если  $\Omega$  — сильно регулярный граф, то  $\Omega$  является  $8 \times 8$ -решеткой, число ребер между  $\Omega$  и  $\Gamma - \Omega$  равно  $64 \cdot 21$ , противоречие. Значит, можно считать, что  $\Omega$  содержит вершину  $e$  из  $\Gamma_3(a)$ . В этом случае  $\Omega$  — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{14, 7, 6; 1, 2, 8\}$ , противоречие.  $\triangleright$

Теорема 3.1 доказана.

#### 4. Доказательство следствия

**Следствие 1.** *Пусть дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$  является реберно симметричным. Тогда группа  $G = \text{Aut}(\Gamma)$  разрешима.*

В этом параграфе будем предполагать, что  $\Gamma$  является реберно симметричным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений  $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ ,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$  и  $a, b$  — смежные вершины графа  $\Gamma$ . Тогда  $G_a$  действует транзитивно на  $[a]$ ,  $|G : G_a| = 624$  и  $|G_a : G_{a,b}| = 35$ . По теореме 2.1 имеем  $|G| = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta 13$ .

**Лемма 4.1.** *Если  $f$  — элемент порядка 13 из  $G$ ,  $g$  — элемент простого порядка  $p \leq 7$  из  $C_G(f)$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$ , то  $p \leq 3$  и  $\Omega$  — пустой граф или  $\Omega$  содержит геодезический 2-путь.*

$\triangleleft$  Пусть  $f$  — элемент порядка 13 из  $G$ ,  $g$  — элемент простого порядка  $p \leq 7$  из  $C_G(f)$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$ .

Если  $\Omega$  — пустой граф, то по теореме 3.1 либо  $p = 2$ ,  $\alpha_3(g) = 40s + 24$  и  $\alpha_1(g) = 8s - 4 + 28t$ , либо  $p = 3$ ,  $\alpha_3(g) = 60l + 24$  и  $\alpha_1(g) = 42t + 12l + 24$ . Так как числа  $\alpha_i(g)$  делятся на 13, то либо  $p = 2$ ,  $\alpha_3(g) = 624$  или  $\alpha_3(g) = 104$ ,  $\alpha_1(g) = 208$ , либо  $p = 3$ ,  $\alpha_3(g) = 624$ .

Если  $\Omega$  — непустой граф, то  $|\Omega| = 13e$ , по теореме 3.1  $\Omega$  содержит геодезический 2-путь и  $p \leq 5$ .

Если  $p = 5$ , то  $e - 3$  делится на 5, число  $\chi_2(g) = (78e + \alpha_3(g) - 104)/20$  сравнимо с 2 по модулю 5,  $\alpha_3(g) = 100s + 144 - 78e$  и  $s + 3$  делится на 13. Отсюда  $s = 10$ ,  $e = 8$  и  $\alpha_3(g) = 1144 - 624 = 520$ . В этом случае  $\alpha_1(g) = 0$ ,  $\chi_1(g) = (1976 - 616)/70 = 136/7$ , противоречие.

Если  $p = 3$ , то  $e$  делится на 3,  $e \leq 12$ , число  $\chi_2(g) = (78e + \alpha_3(g) - 104)/20$  сравнимо с 2 по модулю 3,  $\alpha_3(g) = 60s + 144 - 78e$  и  $5s - 1$  делится на 13. Отсюда либо  $s = 8$  и  $\alpha_3(g) = 624 - 78e$ , либо  $s = 21$  и  $\alpha_3(g) = 1404 - 78e$ . В первом случае  $\chi_1(g) = (19 \cdot 13e + 5\alpha_1(g) - (624 - 78e) - 96)/70 = (13 \cdot 104 + 5\alpha_1(g) + 78e - 96)/70 = (1256 + 5\alpha_1(g) + 78e)/70$ . Отсюда  $3e + 1$  делится на 5 и  $e = 3, 8$ . Если  $e = 3$ , то  $\chi_1(g) = (258 + \alpha_1(g))/14$  и  $\alpha_1(g) = 6(7t - 43)$ . Если  $e = 8$ , то  $\chi_1(g) = (376 + \alpha_1(g))/14$  и  $\alpha_1(g) = 42t + 2$ .

Во втором случае  $\chi_1(g) = (19 \cdot 104 + 5\alpha_1(g) - (1404 - 78e) - 96)/70 = (13 \cdot 104 + 5\alpha_1(g) + 78e - 96)/70 = (1256 + 5\alpha_1(g) + 78e)/70$ . Отсюда  $3e + 1$  делится на 5 и  $e = 3, 8$ . Если  $e = 3$ , то  $\chi_1(g) = (258 + \alpha_1(g))/14$  и  $\alpha_1(g) = 6(7t - 43)$ . Если  $e = 8$ , то  $\chi_1(g) = (376 + \alpha_1(g))/14$  и  $\alpha_1(g) = 42t + 2$  и  $\alpha_1(g) = 42t + 12l + 24$ . Так как числа  $\alpha_i(g)$  делятся на 13, то либо  $p = 2$ ,  $\alpha_3(g) = 624$  или  $\alpha_3(g) = 104$ ,  $\alpha_1(g) = 208$ , либо  $p = 3$ ,  $\alpha_3(g) = 624$  — пустой граф, то, противоречие с леммой 2.4. Значит,  $[a]$  является объединением пяти изолированных 7-клик. Аналогично каждый из графов  $[e]$ ,  $[b]$ ,  $[c]$  является объединением пяти изолированных 7-клик. Отсюда связная компонента  $\Delta$  графа  $\Omega$  — вполне регулярный граф с параметрами  $(v', 7s, 6, 2)$ . Если  $\Omega$  не является связным графом, то степень графа  $\Delta$  не больше 5, противоречие. Итак,  $\Delta = \Omega$ ,  $|\Omega| \leq 163$ , поэтому  $s = 2$ .

Если  $\Omega$  — сильно регулярный граф, то  $\Omega$  является  $8 \times 8$ -решеткой, число ребер между  $\Omega$  и  $\Gamma - \Omega$  равно  $64 \cdot 21$ , противоречие. Значит, можно считать, что  $\Omega$  содержит вершину  $e$  из  $\Gamma_3(a)$ . В этом случае  $\Omega$  — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{14, 7, 6; 1, 2, 8\}$ , противоречие.  $\triangleright$

**Лемма 4.2.** *Группа  $G$  разрешима.*

$\triangleleft$  Если  $G$  — неразрешимая группа,  $\bar{T}$  — цоколь группы  $\bar{G} = G/S(G)$ , то ввиду леммы 4.1 число 13 делит  $|\bar{T}|$ . По [7, таблица 1] группа  $\bar{T}$  изоморфна  $Sz(8)$ ,  $L_2(64)$ ,  $U_4(5)$ ,  $L_3(9)$ ,  $PSp_6(3)$ ,  $P\Omega_7(3)$ ,  $G_2(4)$ ,  $Sp_4(8)$ ,  $P\Omega_8^+(3)$ .

Так как  $\bar{T}$  содержит подгруппу индекса, делящего  $64 \cdot 39$ , то с помощью Атласа получим  $\bar{T} \cong U_4(5)$ ,  $Sp_4(8)$ .

Если  $\bar{T}$  изоморфна группе  $U_4(5)$  порядка  $2^7 3^4 5^6 7 \cdot 13$ , то  $\bar{T}_a$  — максимальная 5-локальная подгруппа, изоморфная либо расширению группы порядка  $5^5$  с помощью расширения группы  $SU_2(5)$  посредством группы порядка 24, либо расширению группы порядка  $5^4$  с помощью расширения группы  $SL_2(25)$  посредством группы порядка 4, противоречие.

Если  $\bar{T}$  изоморфна группе  $Sp_4(8)$  порядка  $2^{12} 3^4 5 \cdot 7^2 13$ , то максимальные 2-локальные подгруппы имеют индекс, кратный 5, подгруппы  $O_4^-(8)$ ,  $Sz(8)$  и  $Sp_2(64).2$  имеют индекс, не кратный 13,  $Sp_4(2).3$  имеет индекс, кратный 7,  $L_2(8)$ ,  $O_4^+(8)$  имеют индекс, кратный 5, противоречие.  $\triangleright$

Из леммы 4.2 получаем следствие 1.

## Литература

1. Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs.—Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer-Verlag.—1989. DOI: 10.1007/978-3-642-74341-2.
2. Brouwer A. E., Neumaier A. A remark on partial linear spaces with girth 5 with an application to strongly regular graphs // *Combinatorica*.—1988.—Vol. 8.—P. 57–61. DOI: 10.1007/BF02122552.
3. Bang S., Koolen J. H. On geometric distance-regular graphs with diameter three // *European J. Combin.*—2014.—Vol. 36.—P. 331–341. DOI: 10.1016/j.ejc.2013.06.044.
4. Cameron P. J. *Permutation Groups*.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.—(London Math. Soc. Student Texts, № 45). DOI: 10.1017/CBO9780511623677.
5. Gavriljuk A. L., Makhnev A. A. On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array  $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$  // *Doklady Mathematics*.—2010.—Vol. 81, № 3.—P. 439–442. DOI: 10.1134/S1064562410030282.
6. Behbahani M., Lam C. Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms // *Discrete Math.*—2011.—Vol. 311.—P. 132–144. DOI: 10.1016/j.disc.2010.10.005
7. Zavarnitsine A. V. Finite simple groups with narrow prime spectrum // *Siberian Electr. Math. Reports*.—2009.—Vol. 6.—P. 1–12.

Статья поступила 19 февраля 2019 г.

МАХНЕВ АЛЕКСАНДР АЛЕКСЕЕВИЧ  
 Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,  
 зав. отделом алгебры и топологии  
 РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;  
 Уральский федеральный университет,  
 профессор кафедры алгебры и топологии  
 РОССИЯ, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19  
 E-mail: makhnev@imm.uran.ru  
<https://orcid.org/0000-0003-2868-6713>

ТОКБАЕВА АЛЬБИНА АНИУАРОВНА  
 Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,  
 старший преподаватель кафедры алгебры и диф. уравнений  
 РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173  
 E-mail: tok2506@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal  
 2019, Volume 21, Issue 2, P. 27–37

## ON A DISTANCE-REGULAR GRAPH WITH AN INTERSECTION ARRAY $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$

Makhnev, A. A.<sup>1,2</sup> and Tokbaeva, A. A.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,  
 16 S. Kovalevskaja St., Ekaterinburg 620990, Russia;  
 Ural Federal University,

19 Mira St., 620002 Ekaterinburg, Russia;

<sup>3</sup> Kh. M. Berbekov Kabardino-Balkarian State University,  
 173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia  
 E-mail: makhnev@imm.uran.ru, tok2506@mail.ru

**Abstract.** It is proved that for a distance-regular graph  $\Gamma$  of diameter 3 with eigenvalue  $\theta_2 = -1$  the complement graph of  $\Gamma_3$  is pseudo-geometric for  $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$ . Bang and Koolen investigated distance-regular graphs with intersection arrays  $(t+1)s, ts, (s+1-\psi); 1, 2, (t+1)\psi$ . If  $t = 4, s = 7, \psi = 6$  then we have array  $35, 28, 6; 1, 2, 30$ . Distance-regular graph  $\Gamma$  with intersection array  $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$  has spectrum of  $35^1, 9^{168}, -1^{182}, -5^{273}$ ,  $v = 1 + 35 + 490 + 98 = 624$  vertices and  $\bar{\Gamma}_3$  is a pseudogeometric graph for  $pG_{30}(35, 14)$ . Due to the border of Delsarte, the order of clicks in  $\Gamma$  is not more than 8. It is also proved that either a neighborhood of any vertex in  $\Gamma$  is the union of an isolated 7-click, or the neighborhood of any vertex in  $\Gamma$  does not contain a 7-click and is a connected graph. The structure of the group  $G$  of automorphisms of a graph  $\Gamma$  with an intersection array  $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$  has been studied. In particular,  $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13\}$  and the edge symmetric graph  $\Gamma$  has a solvable group automorphisms.

**Key words:** distance-regular graph, Delsarte clique, geometric graph.

**Mathematical Subject Classification (2000):** 20D05.

**For citation:** Makhnev, A. A. and Tokbaeva, A. A. On a Distance-Regular Graph with an Intersection Array  $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ , *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 2, pp. 27–37 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32115.

## References

1. Brouwer, A. E., Cohen, A. M. and Neumaier, A. *Distance-Regular Graphs*, Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 1989. DOI: 10.1007/978-3-642-74341-2.
2. Brouwer, A. E. and Neumaier, A. A Remark on Partial Linear Spaces with Girth 5 with an Application to Strongly Regular Graphs, *Combinatorica*, 1988, vol. 8, pp. 57–61. DOI: 10.1007/BF02122552.

3. Bang, S. and Koolen, J. H. On Geometric Distance-Regular Graphs with Diameter Three, *European J. Combin.*, 2014, vol. 36, pp. 331–341. DOI: 10.1016/j.ejc.2013.06.044.
4. Cameron, P. J. *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts, no. 45, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1999. DOI: 10.1017/CBO9780511623677.
5. Gavriljuk, A. L. and Makhnev, A. A. On Automorphisms of Distance-Regular Graphs with Intersection Array  $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ , *Doklady Mathematics*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 439–442. DOI: 10.1134/S1064562410030282.
6. Behbahani, M. and Lam, C. Strongly Regular Graphs with Nontrivial Automorphisms, *Discrete Math.*, 2011, vol. 311, pp. 132–144. DOI: 10.1016/j.disc.2010.10.005.
7. Zavarnitsine, A. V. Finite Simple Groups with Narrow Prime Spectrum, *Siberian Electr. Math. Reports*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.

*Received February 19, 2019*

ALEXANDER A. MAKHNEV  
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,  
16 S. Kovalevskaja St., Ekaterinburg 620990, Russia,  
*Head of Department of Algebra and Topology;*  
Ural Federal University,  
19 Mira St., 620002 Ekaterinburg, Russia,  
*Professor of the Department of Algebra and Topology*  
E-mail: makhnev@imm.uran.ru  
<https://orcid.org/0000-0003-2868-6713>

ALBINA A. TOKBAEVA  
Kh. M. Berbekov Kabardino-Balkarian State University,  
173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia,  
*Senior Lecturer of the Department of Algebra and Differential Equations*  
E-mail: tok2506@mail.ru

УДК 517.927

DOI 10.23671/VNC.2019.2.32116

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ СПЕКТРА  
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА  
С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

С. И. Митрохин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова,  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1  
E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

**Аннотация.** В работе изучается функционально-дифференциальный оператор восьмого порядка с суммируемым потенциалом. Граничные условия являются разделенными. Функционально-дифференциальные операторы такого рода возникают при изучении колебаний балок и мостов, составленных из материалов различной плотности. Чтобы решить функционально-дифференциальное уравнение, задающее дифференциальный оператор, применяется метод вариации постоянных. Решение исходного функционально-дифференциального уравнения сведено к решению интегрального уравнения Вольтерры. Получившееся интегральное уравнение Вольтерры решается методом последовательных приближений Пикара. В результате исследования интегрального уравнения получены асимптотические формулы и оценки для решений функционально-дифференциального уравнения, задающего дифференциальный оператор. При больших значениях спектрального параметра выведена асимптотика решений дифференциального уравнения, определяющего дифференциальный оператор. Аналогично асимптотическим оценкам решений дифференциального оператора второго порядка с гладкими и кусочно-гладкими коэффициентами устанавливаются асимптотические оценки решений исходного функционально-дифференциального уравнения. Полученные асимптотические формулы применяются для изучения граничных условий. В результате приходим к изучению корней функции, представленной в виде определителя восьмого порядка. Чтобы найти корни этой функции, необходимо изучить индикаторную диаграмму. Корни уравнения на собственные значения находятся в восьми секторах бесконечно малого раствора, определяемых индикаторной диаграммой. Изучены поведение корней этого уравнения в каждом из секторов индикаторной диаграммы и асимптотика собственных значений исследуемого дифференциального оператора.

**Ключевые слова:** функционально-дифференциальный оператор, краевая задача, суммируемый потенциал, граничные условия, спектральный параметр, индикаторная диаграмма, асимптотика собственных значений.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 34K08.

**Образец цитирования:** Митрохин С. И. Об исследовании спектра функционально-дифференциального оператора с суммируемым потенциалом // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 2.—С. 38–57. DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32116.

## 1. Постановка задачи

Исследуем функционально-дифференциальный оператор (ФДО), задаваемый уравнением

$$y^{(8)}(x) + q(x)y(x) = \lambda a^8 y(x) + \alpha r(x)y(b), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 < b < \pi, \quad a > 0, \quad (1)$$



где  $\lambda \in \mathbb{C}$  — спектральный параметр,  $\alpha \in \mathbb{C}$ , с разделенными граничными условиями

$$y^{(m_1)}(0) = y^{(m_2)}(0) = \dots = y^{(m_6)}(0) = y^{(n_1)}(\pi) = y^{(n_2)}(\pi) = 0, \quad (2)$$

$m_1 < m_2 < \dots < m_6$ ,  $n_1 < n_2$ ;  $m_k, n_1, n_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$ .

В уравнении (1)  $q(x)$  — потенциал,  $\rho(x) = a^8 > 0$  — весовая функция. Мы предполагаем, что  $q(x)$  и  $r(x)$  — суммируемые функции на отрезке  $[0; \pi]$ :

$$\begin{aligned} q(x) \in L_1[0; \pi] &\Leftrightarrow \left( \int_0^x q(t) dt \right)'_x = q(x) \quad \text{почти для всех значений } x \text{ на } [0; \pi]; \\ r(x) \in L_1[0; \pi] &\Leftrightarrow \left( \int_0^x r(t) dt \right)'_x = r(x) \quad \text{почти для всех значений } x \text{ на } [0; \pi]. \end{aligned} \quad (3)$$

## 2. Исторический обзор

Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов в случае достаточно гладких коэффициентов изучаются уже достаточно давно. В монографии [1, гл. 2] изучено асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций дифференциальных операторов с гладкими, несколько раз дифференцируемыми коэффициентами. Там же описана методика нахождения асимптотики решений дифференциальных уравнений, задающих дифференциальный оператор с гладкими коэффициентами, при больших значениях спектрального параметра. Пользуясь такой асимптотикой решений, в работе [2] были найдены асимптотические формулы для корней одного класса целых функций, которые возникают в случае изучения обыкновенных дифференциальных операторов с регулярными граничными условиями с достаточно гладкими коэффициентами.

С помощью асимптотических формул, найденных в работе [2], в работах [3] и [4] были найдены формулы для вычисления регуляризованных следов дифференциальных операторов высших порядков с достаточно гладкими коэффициентами.

В работе [5] автор продемонстрировал методику нахождения формул регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами. Спектральные свойства дифференциальных операторов с кусочно-гладкими коэффициентами изучались автором в работе [6], а в работе [7] был изучен дифференциальный оператор с кусочно-гладкой весовой функцией.

В работах [8, 9] была изучена краевая задача для функционально-дифференциального оператора второго порядка с гладким потенциалом, были вычислены формулы регуляризованных следов такого оператора. В работе [10] автором были вычислены формулы регуляризованных следов для функционально-дифференциальных операторов второго порядка с кусочно-гладким потенциалом.

В работе [11] был совершен большой прогресс в изучении дифференциальных операторов с негладкими коэффициентами, был изучен оператор второго порядка с суммируемым потенциалом, найдены асимптотики собственных значений и собственных функций оператора Штурма — Лиувилля на отрезке. В работах [12, 13] были изучены операторы второго порядка, у которых потенциал является  $\delta$ -функцией.

В работах [14–17] автор продемонстрировал новую методику изучения дифференциальных операторов порядка выше второго с суммируемыми коэффициентами. Заметим,

что методика работы [11] не переносится на операторы, у которых порядок равен четырем или выше. Отметим также, что сложность изучения дифференциальных операторов возрастает с увеличением порядка дифференциальных уравнений, задающих дифференциальный оператор.

Граничные условия (2) показывают, что мы изучаем сразу целое семейство функционально-дифференциальных операторов восьмого порядка с суммируемыми коэффициентами. Функционально-дифференциальные операторы (так называемые нагруженные операторы) порядка выше второго ранее фактически не изучались (даже в случае гладких коэффициентов).

### 3. Асимптотика решений вспомогательного уравнения при $\lambda \rightarrow \infty$

Рассмотрим вспомогательное дифференциальное уравнение, получающееся из (1) при  $\alpha = 0$  (или при  $r(x) \equiv 0$ ):

$$y^{(8)}(x) + q(x)y(x) = \lambda a^8 y(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad a > 0. \quad (4)$$

Обозначим  $\lambda = s^8$ ,  $s = \sqrt[8]{\lambda}$ , причем для корректности дальнейших выкладок выберем основную ветвь арифметического корня, для которой  $\sqrt[8]{1} = +1$ . Пусть  $w_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) — различные корни восьмой степени из единицы:

$$\begin{aligned} w_k^8 &= 1, \quad w_k = e^{\frac{2\pi i}{8}(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, 8; \quad w_1 = 1; \\ w_2 &= e^{\frac{2\pi i}{8}} = \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = z \neq 0, \\ w_3 &= e^{\frac{4\pi i}{8}} = i = z^2; \dots; w_m = z^{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots, 8. \end{aligned} \quad (5)$$

Числа  $w_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) из (5) делят единичную окружность на восемь равных частей. Для них справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^8 w_k^m = 0, \quad m = 1, 2, \dots, 7; \quad \sum_{k=1}^8 w_k^m = 8, \quad m = 0, \quad m = 8. \quad (6)$$

Методами работ [14–16] устанавливается следующая теорема.

**Теорема 1.** *Общее решение дифференциального уравнения (4) имеет следующий вид:*

$$y(x, s) = \sum_{k=1}^8 C_k y_k(x, s); \quad y^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^8 C_k y_k^{(m)}(x, s), \quad m = 1, 2, \dots, 7, \quad (7)$$

где  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) — произвольные постоянные, при этом при больших значениях спектрального параметра  $\lambda$  для фундаментальной системы  $\{y_k(x, s)\}_{k=1}^8$  справедливы

следующие асимптотические формулы и оценки:

$$y_k(x, s) = e^{aw_k sx} - \frac{A_{7k}(x, s)}{8a^7 s^7} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|ax}}{s^{14}}\right), \quad k = 1, 2, \dots, 8, \quad (8)$$

$$y_k^{(m)}(x, s) = (as)^m \left\{ w_k^m e^{aw_k sx} - \frac{A_{7k}^m(x, s)}{8a^7 s^7} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|ax}}{s^{14}}\right) \right\}, \quad (9)$$

$$k = 1, 2, \dots, 8; \quad m = 1, 2, \dots, 7;$$

$$A_{7k}(x, s) = w_1 e^{aw_1 sx} \int_0^x q(t) e^{a(w_k - w_1)st} dt_{ak1} + w_2 e^{aw_2 sx} \int_0^x q(t) e^{a(w_k - w_2)st} dt_{ak2} + \dots + w_8 e^{aw_8 sx} \int_0^x q(t) e^{a(w_k - w_8)st} dt_{ak8}, \quad k = 1, 2, \dots, 8, \quad (10)$$

$$A_{7k}^m(x, s) = \sum_{n=1}^8 w_n w_n^m e^{aw_n sx} \int_0^x q(t) e^{a(w_k - w_n)st} dt_{akn}, \quad m = 1, 2, \dots, 7. \quad (11)$$

При выводе формул (8)–(11) мы требовали выполнения следующих начальных условий:

$$A_{7k}(0, s) = 0; \quad A_{7k}^m(0, s) = 0; \quad y_k(0, s) = 1; \quad y_k^{(m)}(0, s) = (as)^m w_k^m, \quad (12)$$

$$k = 1, 2, \dots, 8; \quad m = 1, 2, \dots, 7.$$

#### 4. Решение функционально-дифференциального уравнения (1)

Обозначим через  $\Delta_0(x, s)$  определитель Вронского фундаментальной системы решений  $\{y_k(x, s)\}_{k=1}^8$  вспомогательного дифференциального уравнения (4):

$$\Delta_0(x, s) = \det \operatorname{Wr}[y_1(x, s), y_2(x, s), \dots, y_8(x, s)]$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x, s) & y_2(x, s) & \dots & y_7(x, s) & y_8(x, s) \\ y_1'(x, s) & y_2'(x, s) & \dots & y_7'(x, s) & y_8'(x, s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(6)}(x, s) & y_2^{(6)}(x, s) & \dots & y_7^{(6)}(x, s) & y_8^{(6)}(x, s) \\ y_1^{(7)}(x, s) & y_2^{(7)}(x, s) & \dots & y_7^{(7)}(x, s) & y_8^{(7)}(x, s) \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Из общей теории дифференциальных уравнений следует, что определитель Вронского  $\Delta_0(x, s)$  не зависит от параметра  $x$ :

$$\Delta_0(x, s) = \Delta_0(s) = \Delta_0(0; s). \quad (14)$$

Используя формулы (8)–(12), находим

$$\Delta_0(x, s) = \Delta_0(0, s) = \Delta_0(s)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ (as)w_1 & (as)w_2 & \dots & (as)w_7 & (as)w_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (as)^6 w_1^6 & (as)^6 w_2^6 & \dots & (as)^6 w_7^6 & (as)^6 w_8^6 \\ (as)^7 w_1^7 & (as)^7 w_2^7 & \dots & (as)^7 w_7^7 & (as)^7 w_8^7 \end{vmatrix} = \Delta_{00}(as)^{28}, \quad (15)$$

где  $\Delta_{00}$  — определитель Вандермонда чисел  $w_1, w_2, \dots, w_8$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{00} = \det \text{Wandermond}'s(w_1, w_2, \dots, w_8) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ w_1 & w_2 & \dots & w_7 & w_8 \\ w_1^6 & w_2^6 & \dots & w_7^6 & w_8^6 \\ w_1^7 & w_2^7 & \dots & w_7^7 & w_8^7 \end{vmatrix} \\ &= \prod_{\substack{k>m \\ k,m=1,2,\dots,8}} (w_k - w_m) = \Delta_{00} \neq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Разложив определитель  $\Delta_0(x, s)$  из (13) по последней строке, получим

$$\Delta_0(x, s) = -y_1(x, s)D_{81}(x, s) + y_2(x, s)D_{82} - \dots - y_7(x, s)D_{87}(x, s) + y_8(x, s)D_{88}(x, s), \quad (17)$$

где  $D_{8k}(x, s)$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) — алгебраические миноры к элементам восьмой строки и  $k$ -го столбца определителя  $\Delta_0(x, s)$  из (13):

$$\begin{aligned} D_{81}(x, s) &= \begin{vmatrix} y_2(x, s) & \dots & y_7(x, s) & y_8(x, s) \\ y_2'(x, s) & \dots & y_7'(x, s) & y_8'(x, s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_2^{(6)}(x, s) & \dots & y_7^{(6)}(x, s) & y_8^{(6)}(x, s) \end{vmatrix}, \\ &\dots, \\ D_{88}(x, s) &= \begin{vmatrix} y_1(x, s) & y_2(x, s) & \dots & y_7(x, s) \\ y_1'(x, s) & y_2'(x, s) & \dots & y_7'(x, s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(6)}(x, s) & y_2^{(6)}(x, s) & \dots & y_7^{(6)}(x, s) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

Перепишем уравнение (1) в виде  $y^{(8)}(x) + q(x)y(x) - \lambda a^8 y(x) = \alpha r(x)y(b)$  и решим его методом вариации постоянных: будем искать решение в виде  $y = \sum_{k=1}^8 C_k(x, s)y_k(x, s)$ , где  $C_k(x, s)$  — неизвестные функции,  $y_k(x, s)$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) — линейно-независимые решения вспомогательного уравнения (4). В результате докажем следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Решение  $y(x, s)$  функционально-дифференциального уравнения (1) представляется в виде*

$$y(x, s) = \sum_{k=1}^8 C_k y_k(x, s) + \frac{\alpha y(b, s)}{\Delta_0(s)} H_8(x, s), \quad (19)$$

где  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) — произвольные постоянные,  $\{y_k(x, s)\}_{k=1}^8$  — фундаментальная система решений уравнения (4), определяемая формулами (7)–(12),

$$H_8(x, s) = \sum_{k=1}^8 (-1)^k y_k(x, s) \int_0^x r(t) D_{8k}(t, s) dt_{rk}. \quad (20)$$

При этом в силу свойств суммируемости (3), свойств определителей и формул (6) получаем

$$y^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^8 C_k y_k^{(m)}(x, s) + \frac{\alpha y(b, s)}{\Delta_0(s)} H_8^{(m)}(x, s), \quad m = 1, 2, \dots, 7, \quad (21)$$

$$H^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^8 (-1)^k y_k^{(m)}(x, s) \int_0^x r(t) D_{8k}(t, s) dt_{rk}, \quad m = 1, 2, \dots, 7, \quad (22)$$

величина  $\Delta_0(s)$  определена формулами (14)–(16).

Справедливость формул (19)–(22) можно перепроверить непосредственной подстановкой этих формул в уравнение (1).

Подставляя  $x = b$  в уравнение (19), (20), находим

$$y(b, s) = \sum_{k=1}^8 C_k y_k(b, s) + \frac{\alpha y(b, s)}{\Delta_0(s)} H_8(b, s), \quad \Delta_0(s) \neq 0,$$

откуда получаем

$$y(b, s) = \frac{\sum_{k=1}^8 C_k y_k(b, s)}{\psi_8(b, s)}, \quad \psi_8(b, s) = 1 - \frac{\alpha}{\Delta_0(s)} H_8(b, s) \neq 0. \quad (23)$$

Поставим  $y(b, s)$  из (23) в (19), сделаем необходимые преобразования, придем к выводу о справедливости следующего утверждения.

**Теорема 3.** *Общее решение функционально-дифференциального уравнения (1) имеет следующий вид:*

$$y(x, s) = \sum_{k=1}^8 C_k h_k(x, s); \quad y^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^8 C_k h_k^{(m)}(x, s), \quad m = 1, 2, \dots, 7, \quad (24)$$

$C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) — произвольные постоянные,

$$h_k(x, s) = y_k(x, s) + \frac{\alpha}{\Delta_0(s)} \frac{y_k(b, s)}{\psi_8(b, s)} H_8(x, s), \quad k = 1, 2, \dots, 8, \quad (25)$$

$$h_k^{(m)}(x, s) = y_k^{(m)}(x, s) + \frac{\alpha}{\Delta_0(s)} \frac{y_k(b, s)}{\psi_8(b, s)} H_8^{(m)}(x, s), \quad (26)$$

$$k = 1, 2, \dots, 8, \quad m = 1, 2, \dots, 7,$$

функции  $y_k(x, s)$ ,  $y_k^{(m)}(x, s)$  определены формулами (7)–(12),  $H_8(x, s)$ ,  $H_8^{(m)}(x, s)$  определены в (20)–(22),  $\psi_8(b, s)$  определена в (23).

При этом справедливы следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} H_8(0, s) = 0; \quad H_8^{(m)}(0, s) = 0; \quad h_k(0, s) = y_k(0, s) = 1; \\ h_k^{(m)}(0, s) = y_k^{(m)}(0, s) = (as)^m w_k^m, \quad k = 1, 2, \dots, 8; \quad m = 1, 2, \dots, 7. \end{aligned} \quad (27)$$

Формулы (24)–(27) позволяют изучать граничные условия (2).

### 5. Изучение граничных условий (2)

Подставляя формулы (24)–(27) в граничные условия (2), имеем

$$\begin{aligned} y^{(m_p)}(0, s) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^8 C_k h_k^{(m_p)}(0, s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^8 C_k y_k^{(m_p)}(0, s) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^8 C_k (as)^{m_p} w_k^{m_p} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, 6; \end{aligned} \quad (28)$$

$$y^{(n_j)}(\pi, s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^8 C_k h_k^{(n_j)}(\pi, s) = 0, \quad j = 1, j = 2. \quad (29)$$

Система (28), (29) — система из восьми уравнений с восемью неизвестными  $C_1, C_2, \dots, C_8$ . Эта система имеет ненулевые решения только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Поэтому верно следующее утверждение.

**Теорема 4.** Уравнение на собственные значения ФДО (1)–(3) имеет вид

$$f(s) = \begin{vmatrix} y_1^{(m_1)}(0, s) & y_2^{(m_1)}(0, s) & \dots & y_7^{(m_1)}(0, s) & y_8^{(m_1)}(0, s) \\ y_1^{(m_2)}(0, s) & y_2^{(m_2)}(0, s) & \dots & y_7^{(m_2)}(0, s) & y_8^{(m_2)}(0, s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(m_6)}(0, s) & y_2^{(m_6)}(0, s) & \dots & y_7^{(m_6)}(0, s) & y_8^{(m_6)}(0, s) \\ h_1^{(n_1)}(\pi, s) & h_2^{(n_1)}(\pi, s) & \dots & h_7^{(n_1)}(\pi, s) & h_8^{(n_1)}(\pi, s) \\ h_1^{(n_2)}(\pi, s) & h_2^{(n_2)}(\pi, s) & \dots & h_7^{(n_2)}(\pi, s) & h_8^{(n_2)}(\pi, s) \end{vmatrix}. \quad (30)$$

Учитывая начальные условия (27), перепишем уравнение (30) в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(s) &= (as)^{m_1}(as)^{m_2}(\dots)(as)^{m_6} \\ &\times \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \dots & w_7^{m_1} & w_8^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & \dots & w_7^{m_2} & w_8^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_6} & w_2^{m_6} & \dots & w_7^{m_6} & w_8^{m_6} \\ h_1^{(n_1)}(\pi, s) & h_2^{(n_1)}(\pi, s) & \dots & h_7^{(n_1)}(\pi, s) & h_8^{(n_1)}(\pi, s) \\ h_1^{(n_2)}(\pi, s) & h_2^{(n_2)}(\pi, s) & \dots & h_7^{(n_2)}(\pi, s) & h_8^{(n_2)}(\pi, s) \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Разложив определитель  $f(s)$  из формулы (31) по последним двум строчкам, получим

$$\begin{aligned} f(s) &= H_{12}W_{345678} + H_{23}W_{145678} - H_{34}W_{125678} + \dots + H_{78}W_{123456} \\ &+ H_{18}W_{234567} - H_{13}W_{245678} + H_{14}W_{235678} = \dots = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

$$H_{mk} = \begin{vmatrix} h_m^{(n_1)}(\pi, s) & h_k^{(n_1)}(\pi, s) \\ h_m^{(n_2)}(\pi, s) & h_k^{(n_2)}(\pi, s) \end{vmatrix}, \quad m, k = 1, 2, \dots, 8; \quad (33)$$

$W_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6}$  ( $j_k = 1, 2, \dots, 8; k = 1, 2, \dots, 6$ ) — алгебраические миноры к элементу  $H_{mk}$  в определителе  $f(s)$  из (31),  $j_n \neq m$ ,  $j_n \neq k$ , знак «+» в формуле (32) ставится в том случае, если перестановка  $(m, k, j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6)$  четная, знак «-» — если перестановка нечетная.

Алгебраические миноры  $W_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6}$  благодаря удобным обозначениям легко вычисляются:

$$W_{123456} = \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \dots & w_6^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & \dots & w_6^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_6} & w_2^{m_6} & \dots & w_6^{m_6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^{m_1} & z^{m_1} & \dots & z^{5m_1} \\ 1^{m_2} & z^{m_2} & \dots & z^{5m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{m_6} & z^{m_6} & \dots & z^{5m_6} \end{vmatrix} \\ = \prod_{\substack{k > n; \\ k, n=1, 2, \dots, 6}} (z^{m_k} - z^{m_n}) = W_6 \neq 0, \quad (34)$$

так как определитель  $W_{123456}$  представляет собой определитель Вандермонда чисел  $z^{m_1}, z^{m_2}, \dots, z^{m_6}$ .

Далее имеем

$$W_{234567} = \begin{vmatrix} w_2^{m_1} & w_3^{m_1} & \dots & w_7^{m_1} \\ w_2^{m_2} & w_3^{m_2} & \dots & w_7^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_2^{m_6} & w_3^{m_6} & \dots & w_7^{m_6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z^{m_1} & z^{2m_1} & \dots & z^{6m_1} \\ z^{m_2} & z^{2m_2} & \dots & z^{6m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{m_6} & z^{2m_6} & \dots & z^{6m_6} \end{vmatrix} \\ = z^{m_1} z^{m_2} (\dots) z^{m_6} W_{123456} = z^{M_6} W_6, \quad M_6 = \sum_{k=1}^6 m_k. \quad (35)$$

Аналогичным образом выводим

$$W_{345678} = z^{2M_6} W_6; \quad W_{145678} = (-1)z^{3M_6} W_6; \quad W_{125678} = z^{4M_6} W_6; \\ W_{123678} = (-1)z^{5M_6} W_6; \quad W_{123478} = z^{6M_6} W_6; \quad (36) \\ W_{123458} = (-1)z^{7M_6} W_6; \quad W_{123456} = z^{8M_6} W_6 = W_6.$$

Подставим формулы (34)–(36) в уравнение (33), поделим на  $z^{2M_6} W_6 \neq 0$ , получим

$$f(s) = \begin{vmatrix} h_1^{(n_1)}(\pi, s) & h_2^{(n_1)}(\pi, s) \\ h_1^{(n_2)}(\pi, s) & h_2^{(n_2)}(\pi, s) \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} h_2^{(n_1)}(\pi, s) & h_3^{(n_1)}(\pi, s) \\ h_2^{(n_2)}(\pi, s) & h_3^{(n_2)}(\pi, s) \end{vmatrix} z^{M_6} + z^{2M_6} \begin{vmatrix} h_3^{(n_1)}(\pi, s) & h_4^{(n_1)}(\pi, s) \\ h_3^{(n_2)}(\pi, s) & h_4^{(n_2)}(\pi, s) \end{vmatrix} - \dots \\ = \{\phi_{12} - \phi_{23} z^{M_6} + \phi_{34} z^{2M_6} - \dots\} (as)^{n_1} (as)^{n_2} = 0, \quad (37)$$

при этом каждый из определителей  $\phi_{mk}$  можно выписать более подробно с помощью формул (25), (26):

$$\phi_{12} = \begin{vmatrix} \frac{h_1^{(n_1)}(\pi, s)}{(as)^{n_1}} & \frac{h_2^{(n_1)}(\pi, s)}{(as)^{n_1}} \\ \frac{h_1^{(n_2)}(\pi, s)}{(as)^{n_2}} & \frac{h_2^{(n_2)}(\pi, s)}{(as)^{n_2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \frac{y_1^{(n_1)}(\pi, s)}{(as)^{n_1}} + \frac{\alpha}{\Delta_0(s)} \frac{y_1(b, s)}{\psi_8(b, s)} \frac{H_8^{(n_1)}(\pi, s)}{(as)^{n_1}} & \frac{y_2^{(n_1)}(\pi, s)}{(as)^{n_1}} + \frac{\alpha}{\Delta_0(s)} \frac{y_2(b, s)}{\psi_8(b, s)} \frac{H_8^{(n_1)}(\pi, s)}{(as)^{n_1}} \\ \frac{y_1^{(n_2)}(\pi, s)}{(as)^{n_2}} + \frac{\alpha}{\Delta_0(s)} \frac{y_1(b, s)}{\psi_8(b, s)} \frac{H_8^{(n_2)}(\pi, s)}{(as)^{n_2}} & \frac{y_2^{(n_2)}(\pi, s)}{(as)^{n_2}} + \frac{\alpha}{\Delta_0(s)} \frac{y_2(b, s)}{\psi_8(b, s)} \frac{H_8^{(n_2)}(\pi, s)}{(as)^{n_2}} \end{vmatrix}, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \phi_{23} &= \begin{vmatrix} \frac{h_2^{(n_1)}(\pi, s)}{(as)^{n_1}} & \frac{h_3^{(n_1)}(\pi, s)}{(as)^{n_1}} \\ \frac{h_2^{(n_2)}(\pi, s)}{(as)^{n_2}} & \frac{h_3^{(n_2)}(\pi, s)}{(as)^{n_2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{12} & u_{13} \\ u_{22} & u_{23} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{y_2^{(n_1)}(\pi, s)}{(as)^{n_1}} + \frac{\alpha}{\Delta_0(s)} \frac{y_2(b, s)}{\psi_8(b, s)} \frac{H_8^{(n_1)}(\pi, s)}{(as)^{n_1}} & \frac{y_3^{(n_1)}(\pi, s)}{(as)^{n_1}} + \frac{\alpha}{\Delta_0(s)} \frac{y_3(b, s)}{\psi_8(b, s)} \frac{H_8^{(n_1)}(\pi, s)}{(as)^{n_1}} \\ \frac{y_2^{(n_2)}(\pi, s)}{(as)^{n_2}} + \frac{\alpha}{\Delta_0(s)} \frac{y_2(b, s)}{\psi_8(b, s)} \frac{H_8^{(n_2)}(\pi, s)}{(as)^{n_2}} & \frac{y_3^{(n_2)}(\pi, s)}{(as)^{n_2}} + \frac{\alpha}{\Delta_0(s)} \frac{y_3(b, s)}{\psi_8(b, s)} \frac{H_8^{(n_2)}(\pi, s)}{(as)^{n_2}} \end{vmatrix}, \dots \end{aligned} \quad (39)$$

Подставляя формулы (8)–(11) и (17)–(22) в (38), (39), видим, что определители  $\phi_{12}$ ,  $\phi_{13}$  представляют собой квазиполиномы. Таким образом, функция  $f(s)$  из (37) также представляет собой квазиполином.

Для нахождения корней уравнения (37) необходимо изучить так называемую индикаторную диаграмму этого уравнения (см. [18, гл. 12]), т. е. выпуклую оболочку показателей экспонент, входящих в это уравнение. Раскладывая определители  $\phi_{12}, \phi_{13}, \dots$  по столбцам, применяя формулы (8)–(11), видим, что в определитель  $\phi_{12}$  входят экспоненты  $e^{a(w_1+w_2)s\pi}$ , в определитель  $\phi_{23}$  входят экспоненты  $e^{a(w_2+w_3)s\pi}, \dots$ , в определитель  $\phi_{mk}$  — экспоненты  $e^{a(w_m+w_k)s\pi}$ . Значит, индикаторная диаграмма уравнения (37)–(39) имеет следующий вид:

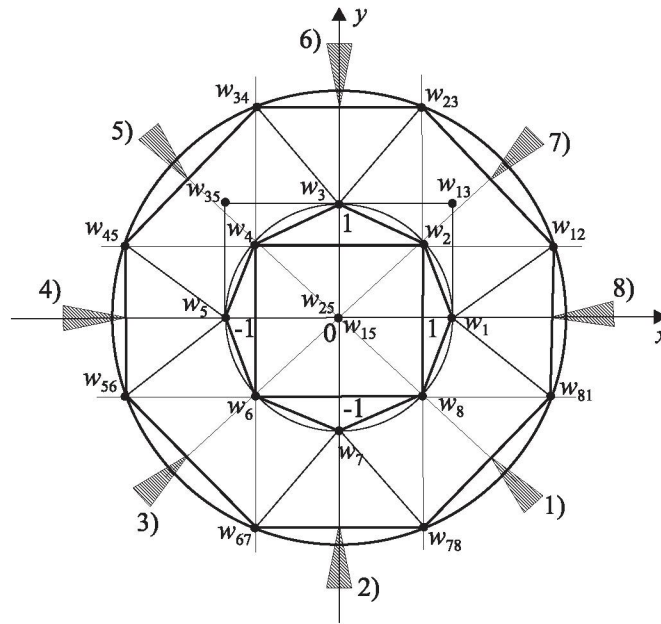


Рис. 1.

На рис. 1 внутренняя единичная окружность делится числами  $w_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) из (5) на восемь равных частей, для второй окружности введены обозначения  $w_{km} = w_k + w_m$  ( $k, m = 1, 2, \dots, 8$ ). На наружную окружность (индикаторную диаграмму) попадают только точки  $w_1 + w_2, w_2 + w_3, w_3 + w_4, \dots, w_7 + w_8, w_8 + w_9 = w_8 + w_1$ , точки  $w_k + w_m$ ,  $(m - k) \geq 2$  попадают внутрь индикаторной диаграммы и на асимптотику корней уравнения (37)–(39) не влияют. Корни уравнения (37)–(39) могут находиться только в восьми заштрихованных секторах рис. 1, бесконечно малого раствора, биссектрисы которых являются серединными перпендикулярами к сторонам правильного восьмиугольника  $w_{12}w_{23}w_{34} \dots w_{78}w_{81}w_{12}$ .



**6. Уравнение на собственные значения ФДО (1)–(3) в секторе 1) индикаторной диаграммы**

Для того, чтобы изучить корни уравнения (37)–(39) в секторе 1) индикаторной диаграммы на рис. 1, надо оставить только экспоненты с показателями  $\bar{w}_{81} = w_{12} = w_1 + w_2$  и  $\bar{w}_{78} = w_{23} = w_2 + w_3$ , т. е. экспоненты  $e^{a(w_1+w_2)s\pi}$  и  $e^{a(w_2+w_3)s\pi}$ . Поэтому справедливо утверждение.

**Теорема 5.** Уравнение на собственные значения ФДО (1)–(3) в секторе 1) индикаторной диаграммы на рис. 1 имеет следующий вид:

$$g_1(s) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_{12} & u_{13} \\ u_{22} & u_{23} \end{vmatrix} z^{M_6} = 0, \quad (40)$$

причем во всех асимптотических формулах необходимо оставить только экспоненты с показателями  $w_1 + w_2$ ,  $w_2 + w_3$ , величины  $u_{mk}$  определены в (38), (39).

Изучим сначала асимптотическое поведение функций  $D_{8k}(x, s)$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) из (17), (18).

Применяя формулы (8)–(12) и свойства определителей, из (18) имеем

$$D_{81}(x, s) = \begin{vmatrix} v_2 - \frac{A_{72}(x, s)}{R_7} + \dots & \dots & v_7 - \frac{A_{77}(x, s)}{R_7} + \dots & v_8 - \frac{A_{78}(x, s)}{R_7} + \dots \\ w_2 v_2 - \frac{A_{72}^1(x, s)}{R_7} + \dots & \dots & w_7 v_7 - \frac{A_{77}^1(x, s)}{R_7} + \dots & w_8 v_8 - \frac{A_{78}^1(x, s)}{R_7} + \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_2^6 v_2 - \frac{A_{72}^6(x, s)}{R_7} + \dots & \dots & w_7^6 v_7 - \frac{A_{77}^6(x, s)}{R_7} + \dots & w_8^6 v_8 - \frac{A_{78}^6(x, s)}{R_7} + \dots \end{vmatrix} \quad (41)$$

$$\times (as)(as)^2(\dots)(as)^6 = (as)^{21} \left[ D_{81,0}(x, s) - \frac{D_{81,7}(x, s)}{8a^7 s^7} + O\left(\frac{1}{s^{14}}\right) \right],$$

где введены обозначения  $v_k = e^{aw_k sx}$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ),  $R_7 = 8a^7 s^7$ , « $+\dots$ » = « $+O(\frac{1}{s^{14}})$ »,

$$D_{81,0}(x, s) = \begin{vmatrix} v_2 & \dots & v_7 & v_8 \\ w_2 v_2 & \dots & w_7 v_7 & w_8 v_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_2^6 v_2 & \dots & w_7^6 v_7 & w_8^6 v_8 \end{vmatrix} = \prod_{k=2}^8 v_k \delta_{81}, \quad (42)$$

при этом в силу формул (5), (6) имеем

$$\prod_{k=2}^8 v_k = \prod_{k=2}^8 e^{aw_k sx} = \exp(a(w_2 + w_3 + \dots + w_8)sx) = e^{-aw_1 sx}, \quad (43)$$

$\delta_{81}$  — алгебраический минор к элементу восьмой строки и первого столбца определителя  $\Delta_{00}$  из (16):

$$\delta_{81} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ w_2 & \dots & w_7 & w_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_2^6 & \dots & w_7^6 & w_8^6 \end{vmatrix}. \quad (44)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** Матрица  $\delta_{kn}$  ( $k, n = 1, 2, \dots, 8$ ) алгебраических миноров к элементам  $b_{kn}$  ( $k, n = 1, 2, \dots, 8$ ) определителя  $\Delta_{00}$  из (16) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 (\delta_{kn}) &= \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{17} & \delta_{18} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \dots & \delta_{27} & \delta_{28} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \dots & \delta_{37} & \delta_{38} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{71} & \delta_{72} & \delta_{73} & \dots & \delta_{77} & \delta_{78} \\ \delta_{81} & \delta_{82} & \delta_{83} & \dots & \delta_{87} & \delta_{88} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\Delta_{00}}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ -w_1^{-1} & w_2^{-1} & -w_3^{-1} & \dots & -w_7^{-1} & w_8^{-1} \\ w_1^{-2} & -w_2^{-2} & w_3^{-2} & \dots & w_7^{-2} & -w_8^{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{-6} & -w_2^{-6} & w_3^{-6} & \dots & w_7^{-6} & -w_8^{-6} \\ -w_1^{-7} & w_2^{-7} & -w_3^{-7} & \dots & -w_7^{-7} & w_8^{-7} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{45}$$

В справедливости леммы можно убедиться, раскладывая определитель  $\Delta_{00}$  из (16) по строчкам или по столбцам, используя формулы (45).

Строгое доказательство леммы приведено автором в работе [19].

С учетом (43)–(45), формула (42) примет вид

$$D_{81,0}(x, s) = \prod_{k=2}^8 v_k \delta_{81} = e^{-aw_1 sx} (-w_1^{-7}) = (-1)w_1 e^{-aw_1 sx}, \tag{46}$$

так как  $w_1^8 = w_k^8$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ), при этом в формуле (41) имеем

$$D_{81,7}(x, s) = \begin{vmatrix} A_{72}(x, s) & v_3 & \dots & v_8 \\ A_{72}^1(x, s) & w_3 v_3 & \dots & w_8 v_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{72}^6(x, s) & w_3^6 v_3 & \dots & w_8^6 v_8 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} v_2 & \dots & v_7 & A_{78}(x, s) \\ w_2 v_2 & \dots & w_2 v_7 & A_{78}^1(x, s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_2^6 v_2 & \dots & w_2^6 v_7 & A_{78}^6(x, s) \end{vmatrix}. \tag{47}$$

Аналогично формулам (41)–(47) можно вычислить определители  $D_{8k}(x, s)$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) из (17)–(18):

$$D_{8k}(x, s) = (as)^{21} \left[ D_{8k,0}(x, s) - \frac{D_{8k,7}(x, s)}{8a^7 s^7} + O\left(\frac{1}{s^{14}}\right) \right], \quad k = 1, 2, \dots, 8, \tag{48}$$

$$D_{8k,0}(x, s) = (-1)^k w_k e^{-aw_k sx}, \quad k = 1, 2, \dots, 8, \tag{49}$$

при этом величины  $D_{8k,7}(x, s)$  выписываются в виде суммы определителей аналогично величине  $D_{81,7}(x, s)$  из (47).

Используя формулы (7)–(12), (42)–(50), (23)–(27), (37), (39), векторы-столбцы  $(u_{1k}; u_{2k})^*$  ( $k = 1, 2, 3$ ) из формулы (40) приведем к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1^{n_1} e^{aw_1 s \pi} - \frac{A_{71}^{n_1}(\pi, s)}{8a^7 s^7} + \frac{\alpha e^{aw_1 sb}}{8a^7 s^7} R(\pi; s; n_1) \\ w_1^{n_2} e^{aw_1 s \pi} - \frac{A_{71}^{n_2}(\pi, s)}{8a^7 s^7} + \frac{\alpha e^{aw_1 sb}}{8a^7 s^7} R(\pi; s; n_2) \end{pmatrix}, \tag{50}$$

$$R(\pi; s; n, k) = \sum_{m=1}^8 w_m w_m^{n_k} e^{aw_m sx} \int_0^x r(t) e^{-aw_m st} dt, \quad k = 1, 2; \tag{51}$$

$$\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2^{n_1} e^{aw_2 s \pi} - \frac{A_{72}^{n_1}(\pi, s)}{8a^7 s^7} + \frac{\alpha e^{aw_2 sb}}{8a^7 s^7} R(\pi; s; n_1) \\ w_2^{n_2} e^{aw_2 s \pi} - \frac{A_{72}^{n_2}(\pi, s)}{8a^7 s^7} + \frac{\alpha e^{aw_2 sb}}{8a^7 s^7} R(\pi; s; n_2) \end{pmatrix}, \quad (52)$$

$$\begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_3^{n_1} e^{aw_3 s \pi} - \frac{A_{73}^{n_1}(\pi, s)}{8a^7 s^7} + \frac{\alpha e^{aw_3 sb}}{8a^7 s^7} R(\pi; s; n_1) \\ w_3^{n_2} e^{aw_3 s \pi} - \frac{A_{73}^{n_2}(\pi, s)}{8a^7 s^7} + \frac{\alpha e^{aw_3 sb}}{8a^7 s^7} R(\pi; s; n_2) \end{pmatrix}, \quad (53)$$

причем для сектора 1) в величинах  $A_{7m}^{n_k}(\pi, s)$  из (10), (11) и  $R(\pi; s; n_k)$  ( $k = 1, 2; m = 1, 2, 3$ ) из (51) необходимо оставлять только экспоненты  $e^{aw_1 s \pi}$ ,  $e^{aw_2 s \pi}$  и  $e^{aw_3 s \pi}$ .

Применяя формулы (50)–(53), уравнение (40) можно переписать в следующем виде:

$$g_1(s) = g_{1,0}(s) - \frac{g_{1,7,1}(s)}{8a^7 s^7} + \frac{g_{1,7,2}(s)}{8a^7 s^7} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right) = 0, \quad (54)$$

$$g_{1,0}(s) = \begin{vmatrix} w_1^{n_1} e^{aw_1 s \pi} & w_2^{n_1} e^{aw_2 s \pi} \\ w_1^{n_2} e^{aw_1 s \pi} & w_2^{n_2} e^{aw_2 s \pi} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} w_2^{n_1} e^{aw_2 s \pi} & w_3^{n_1} e^{aw_3 s \pi} \\ w_2^{n_2} e^{aw_2 s \pi} & w_3^{n_2} e^{aw_3 s \pi} \end{vmatrix} z^{M_6}, \quad (55)$$

$$\begin{aligned} g_{1,7,1}(s) &= \begin{vmatrix} A_{71}^{n_1}(\pi, s) & w_2^{n_1} e^{aw_2 s \pi} \\ A_{71}^{n_2}(\pi, s) & w_2^{n_2} e^{aw_2 s \pi} \end{vmatrix}_1 + \begin{vmatrix} w_1^{n_1} e^{aw_2 s \pi} & A_{72}^{n_1}(\pi, s) \\ w_1^{n_2} e^{aw_2 s \pi} & A_{72}^{n_2}(\pi, s) \end{vmatrix}_2 \\ &\quad - \begin{vmatrix} A_{72}^{n_1}(\pi, s) & w_3^{n_1} e^{aw_3 s \pi} \\ A_{72}^{n_2}(\pi, s) & w_3^{n_2} e^{aw_3 s \pi} \end{vmatrix}_3 z^{M_6} - \begin{vmatrix} w_2^{n_1} e^{aw_2 s \pi} & A_{73}^{n_1}(\pi, s) \\ w_2^{n_2} e^{aw_2 s \pi} & A_{73}^{n_2}(\pi, s) \end{vmatrix}_4 z^{M_6}, \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} g_{1,7,2}(s) &= \begin{vmatrix} \alpha e^{aw_1 sb} R(\pi; s; n_1) & w_2^{n_1} e^{aw_2 s \pi} \\ \alpha e^{aw_1 sb} R(\pi; s; n_2) & w_2^{n_2} e^{aw_2 s \pi} \end{vmatrix}_5 + \begin{vmatrix} w_1^{n_1} e^{aw_1 s \pi} & \alpha e^{aw_2 sb} R(\pi; s; n_1) \\ w_1^{n_2} e^{aw_1 s \pi} & \alpha e^{aw_2 sb} R(\pi; s; n_2) \end{vmatrix}_6 \\ &\quad - \begin{vmatrix} \alpha e^{aw_2 sb} R(\pi; s; n_1) & w_3^{n_1} e^{aw_3 s \pi} \\ \alpha e^{aw_2 sb} R(\pi; s; n_2) & w_3^{n_2} e^{aw_3 s \pi} \end{vmatrix}_7 z^{M_6} - \begin{vmatrix} w_2^{n_1} e^{aw_2 s \pi} & \alpha e^{aw_3 sb} R(\pi; s; n_1) \\ w_2^{n_2} e^{aw_2 s \pi} & \alpha e^{aw_3 sb} R(\pi; s; n_2) \end{vmatrix}_8 z^{M_6}. \end{aligned} \quad (57)$$

Применяя свойства определителей, функцию  $g_{1,0}(s)$  из (55) приведем к виду

$$g_{1,0}(s) = \begin{vmatrix} w_1^{n_1} & w_2^{n_1} \\ w_1^{n_2} & w_2^{n_2} \end{vmatrix} e^{a(w_1+w_2)s\pi} - \begin{vmatrix} w_2^{n_1} & w_3^{n_1} \\ w_2^{n_2} & w_3^{n_2} \end{vmatrix} e^{a(w_2+w_3)s\pi} z^{M_6}, \quad (58)$$

при этом благодаря формулам (5) имеем

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} w_1^{n_1} & w_2^{n_1} \\ w_1^{n_2} & w_2^{n_2} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1^{n_1} & z^{n_1} \\ 1^{n_2} & z^{n_2} \end{vmatrix} = z^{n_2} - z^{n_1} = E_2; \\ \begin{vmatrix} w_2^{n_1} & w_3^{n_1} \\ w_2^{n_2} & w_3^{n_2} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} z^{n_1} & z^{2n_1} \\ z^{n_2} & z^{2n_2} \end{vmatrix} = z^{n_1} z^{n_2} E_2 = z^{N_2} E_2, \quad N_2 = n_1 + n_2. \end{aligned} \quad (59)$$

Вычислим определитель  $|\dots|_1$  из (56), применяя формулы (10), (11), (59) и свойства

определителей

$$\begin{aligned}
|\dots|_1 &= \begin{vmatrix} w_1 w_1^{n_1} v_1 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a11} + w_2 w_2^{n_1} v_2 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a12} + w_3 w_3^{n_1} v_3 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a13} & w_2^{n_1} \\ w_1 w_1^{n_2} v_1 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a11} + w_2 w_2^{n_2} v_2 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a12} + w_3 w_3^{n_2} v_3 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a13} & w_2^{n_2} \end{vmatrix} e^{aw_2 s \pi} \\
&= e^{aw_2 s \pi} \left\{ w_1 v_1 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a11} \begin{vmatrix} w_1^{n_1} & w_2^{n_1} \\ w_1^{n_2} & w_2^{n_2} \end{vmatrix} + w_2 v_2 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a12} \begin{vmatrix} w_2^{n_1} & w_2^{n_1} \\ w_2^{n_2} & w_2^{n_2} \end{vmatrix} \right. \\
&\quad \left. + w_3 v_3 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a13} \begin{vmatrix} w_3^{n_1} & w_2^{n_1} \\ w_3^{n_2} & w_2^{n_2} \end{vmatrix} \right\} \stackrel{(60)}{=} w_1 E_2 e^{a(w_1+w_2)s\pi} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a11} \\
&\quad - w_3 E_2 z^{N_2} e^{a(w_2+w_3)s\pi} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a13},
\end{aligned} \tag{60}$$

где были введены обозначения  $v_k = e^{aw_k s \pi}$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ).

Аналогичным образом выводятся формулы для определителей  $|\dots|_2$ ,  $|\dots|_3$  и  $|\dots|_4$  из (56):

$$\begin{aligned}
|\dots|_2 &= e^{aw_1 s \pi} \begin{vmatrix} w_1^{n_1} & w_1 w_1^{n_1} v_1 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a21} + w_2 w_2^{n_1} v_2 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a22} + w_3 w_3^{n_1} v_3 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a23} \\ w_1^{n_2} & w_1 w_1^{n_2} v_1 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a21} + w_2 w_2^{n_2} v_2 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a22} + w_3 w_3^{n_2} v_3 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a23} \end{vmatrix} \\
&= w_2 E_2 e^{a(w_1+w_2)s\pi} \int_0^\pi q(t) dt_{a22};
\end{aligned} \tag{61}$$

$$|\dots|_3 = w_2 E_2 z^{N_2} e^{a(w_2+w_3)s\pi} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a22}; \tag{62}$$

$$|\dots|_4 = -w_1 E_2 e^{a(w_1+w_2)s\pi} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a31} + w_3 E_2 z^{N_2} e^{a(w_2+w_3)s\pi} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a33}.$$

Далее вычисляем определители  $|\dots|_m$  ( $m = 5, 6, 7, 8$ ) из (57):

$$\begin{aligned}
|\dots|_5 &= \alpha \begin{vmatrix} w_1 w_1^{n_1} v_1 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r1} + w_2 w_2^{n_1} v_2 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r2} + w_3 w_3^{n_1} v_3 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r3} & w_2^{n_1} \\ w_1 w_1^{n_2} v_1 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r1} + w_2 w_2^{n_2} v_2 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r2} + w_3 w_3^{n_2} v_3 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r3} & w_2^{n_2} \end{vmatrix} \\
&\quad \times e^{aw_1 s b} e^{aw_2 s \pi} = w_1 E_2 \alpha e^{aw_1 s b} e^{a(w_1+w_2)s\pi} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r1} \\
&\quad - \alpha w_3 E_2 z^{N_2} e^{aw_1 s b} e^{a(w_2+w_3)s\pi} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r3};
\end{aligned} \tag{63}$$

$$|\dots|_6 = \alpha \begin{vmatrix} w_1^{n_1} & w_1 w_1^{n_1} v_1 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r_1} & + w_2 w_2^{n_1} v_2 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r_2} & + w_3 w_3^{n_1} v_3 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r_3} \\ w_1^{n_2} & w_1 w_1^{n_2} v_1 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r_1} & + w_2 w_2^{n_2} v_2 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r_2} & + w_3 w_3^{n_2} v_3 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r_3} \end{vmatrix} \quad (64)$$

$$\times e^{aw_2 sb} e^{aw_2 s\pi} = \alpha w_2 E_2 e^{aw_2 sb} e^{a(w_1+w_2)s\pi} \int_0^\pi q(t) dt_{r_2};$$

$$|\dots|_7 = w_2 E_2 z^{N_2} \alpha e^{aw_2 sb} e^{a(w_2+w_3)s\pi} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r_2}; \quad (65)$$

$$|\dots|_8 = (-\alpha) w_1 E_2 e^{aw_3 sb} e^{a(w_1+w_2)s\pi} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r_1} + \alpha w_3 E_2 z^{N_2} e^{aw_3 sb} e^{a(w_2+w_3)s\pi} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r_3}.$$

Подставляя формулы (60)–(65) в уравнение (54)–(59) и поделив на  $E_2 e^{a(w_2+w_3)s\pi} \neq 0$ , приведем его к следующему виду:

$$g_1(s) = \left[ e^{a(w_1-w_3)s\pi} - z^{M_6} z^{N_2} \right] - \frac{1}{8a^7 s^7} [\theta_1(s) + \theta_2(s)] + \frac{\alpha}{8a^7 s^7} \theta_3(s) + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right) = 0, \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \theta_1(s) &= w_1 e^{a(w_1-w_3)s\pi} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a11} + w_2 e^{a(w_1-w_3)s\pi} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a22} \\ &\quad - w_2 z^{M_6} z^{N_2} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a22} - w_3 z^{M_6} z^{N_2} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a33}; \\ \left( \int_0^\pi \dots \right)_{amk} &\stackrel{(10)}{=} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a11} = \int_0^\pi q(t) dt_{a11}, \quad k = 1, 2, \dots, 8; \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \theta_2(s) &= w_1 z^{M_6} e^{a(w_1-w_3)s\pi} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a31} - w_3 z^{N_2} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a13}; \\ \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a13} &\stackrel{(10)}{=} \int_0^\pi q(t) e^{a(w_1-w_3)st} dt_{a13}; \\ \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a31} &\stackrel{(10)}{=} \int_0^\pi q(t) e^{a(w_3-w_1)st} dt_{a31}; \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \theta_3(s) &= w_1 e^{aw_1 sb} e^{a(w_1-w_3)s\pi} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r_1} - w_3 z^{N_2} e^{aw_1 sb} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r_3} \\ &\quad + w_2 e^{aw_2 sb} e^{a(w_1-w_2)s\pi} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r_2} - w_2 z^{M_6} z^{N_2} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r_2} \\ &\quad + w_1 z^{M_6} e^{aw_3 sb} e^{a(w_1-w_3)s\pi} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r_1} - w_3 z^{M_6} z^{N_2} e^{aw_3 sb} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r_3}; \end{aligned}$$

$$\left( \int_0^\pi \dots \right)_{rk} \stackrel{(52)}{=} \int_0^\pi r(t) e^{-aw_k st} dt_{rk}, \quad k = 1, 2, \dots, 8. \quad (69)$$

### 7. Асимптотика собственных значений ФДО (1)–(3) в секторе 1) индикаторной диаграммы

Основное приближение уравнения (66)–(69) имеет следующий вид:

$$e^{a(w_1-w_3)s\pi} = z^{M_6} z^{N_2} = e^{2\pi i k} e^{\frac{2\pi i}{8} M_6} e^{\frac{2\pi i}{8} N_2} \Leftrightarrow s_{k,1,\text{осн}} = \frac{2i\tilde{k}}{a(w_1-w_3)}, \quad (70)$$

$$\tilde{k} = k + \frac{M_6}{8} + \frac{N_2}{8}, \quad M_6 = \sum_{k=1}^6 m_k, \quad N_2 = n_1 + n_2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Формула для  $s_{k,1,\text{осн}}$  из (70) помогает выписать формулу для нахождения корней квазиполинома вида (66)–(69) (см. [20, 21]).

**Теорема 6.** Асимптотика собственных значений ФДО (1)–(3) в секторе 1) индикаторной диаграммы на рис. 1 имеет следующий вид:

$$s_{k,1} = \frac{2i}{a(w_1-w_3)} \left[ \tilde{k} + \frac{d_{7k,1}}{\tilde{k}^7} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{14}}\right) \right], \quad k \in \mathbb{N}, \quad (71)$$

где величина  $\tilde{k}$  определена формулой (70).

◁ Для доказательства теоремы 6 необходимо доказать, что величины  $d_{7k,1}$  из (71) находятся единственным образом, попутно мы приведем явные формулы для их вычисления.

По формулам Маклорена имеем

$$e^{a(w_1-w_3)s\pi} \Big|_{s_{k,1}} \stackrel{(71)}{=} \exp \left[ a(w_1-w_3)\pi \frac{2i}{a(w_1-w_3)} \left( \tilde{k} + \frac{d_{7k,1}}{\tilde{k}^7} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{14}}\right) \right) \right] = z^{M_6} z^{N_2} \left[ 1 + \frac{2\pi i d_{7k,1}}{\tilde{k}^7} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{14}}\right) \right], \quad (72)$$

$$\frac{1}{s^7} \Big|_{s_{k,1}} \stackrel{(72)}{=} \frac{a^7(w_1-w_3)^7}{2^7 i^7} \frac{1}{\tilde{k}^7} \left( 1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^8}\right) \right). \quad (73)$$

Подставляя формулы (71)–(73) в уравнения (66)–(69), получаем

$$\left[ z^{M_6} z^{N_2} + z^{M_6} z^{N_2} \frac{2\pi i d_{7k,1}}{\tilde{k}^7} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{14}}\right) - z^{M_6} z^{N_2} \right] - \frac{a^7(w_1-w_3)^7 i}{2^7 i^7} \frac{1}{\tilde{k}^7} \left( \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^8}\right) \right) \times \left\{ \theta_1(s) \Big|_{s_{k,1}} + \theta_2(s) \Big|_{s_{k,1}} - \alpha \theta_3(s) \Big|_{s_{k,1}} \right\} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{14}}\right) = 0, \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \theta_1(s) \Big|_{s_{k,1}} &= w_1 z^{M_6} z^{N_2} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a11} + w_2 z^{M_6} z^{N_2} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a22} \\ &- w_2 z^{M_6} z^{N_2} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a22} - w_3 z^{M_6} z^{N_2} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a33} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{14}}\right) \\ &= (w_1 - w_3) z^{M_6} z^{N_2} \int_0^\pi q(t) dt_{a11}; \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned}
\theta_2(s) \Big|_{s_{k,1}} &= z^{M_6} z^{N_2} \left[ w_1 z^{M_6} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a31} - w_3 z^{-M_6} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a13} \right] \Big|_{s_{k,1}} \\
&= (-1) z^{M_6} z^{N_2} e^{\frac{2\pi i}{8}} \left[ e^{\frac{2\pi i}{8}} e^{-\frac{2\pi i}{8} M_6} \int_0^\pi q(t) \exp \left[ a(w_1 - w_3) \frac{2i\tilde{k}t}{a(w_1 - w_3)} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^7}\right) \right] dt_{a13} \right. \\
&\quad \left. - e^{-\frac{2\pi i}{8}} e^{\frac{2\pi i}{8} M_6} \int_0^\pi q(t) \left[ e^{-2i\tilde{k}t} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^7}\right) \right] dt_{a31} \right] \\
&= (-2i) z^{M_6} z^{N_2} e^{\frac{2\pi i}{8}} \int_0^\pi q(t) \sin \left[ 2\tilde{k}t - \frac{2\pi}{8} M_6 + \frac{2\pi}{8} \right] dt_{b1};
\end{aligned} \tag{76}$$

$$\begin{aligned}
\theta_3(s) \Big|_{s_{k,1}} &\stackrel{(70),(73)}{=} z^{M_6} z^{N_2} \left\{ w_1 e^{aw_1 sb} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r1} - w_3 z^{-M_6} e^{aw_1 sb} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r3} \right. \\
&\quad \left. + w_2 e^{aw_2 sb} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r2} - w_2 e^{aw_2 sb} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r2} + w_1 z^{M_6} e^{aw_3 sb} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r1} \right. \\
&\quad \left. - w_3 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r1} - w_3 e^{aw_3 sb} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{r3} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^7}\right) \right\} = z^{M_6} z^{N_2} [\theta_{31}(s) + \theta_{32}(s)] \Big|_{s_{k,1}},
\end{aligned} \tag{77}$$

$$\theta_{31}(s) = w_1 z^{M_6} e^{aw_3 sb} \int_0^\pi r(t) e^{-aw_1 st} dt_{r1} - w_3 z^{-M_6} e^{aw_1 sb} \int_0^\pi r(t) e^{-aw_3 st} dt_{r3}, \tag{78}$$

$$\theta_{32}(s) = w_1 e^{aw_1 sb} \int_0^\pi r(t) e^{-aw_1 st} dt_{r1} - w_3 e^{aw_3 sb} \int_0^\pi r(t) e^{-aw_3 st} dt_{r3}. \tag{79}$$

При этом из формул (78) и (79) получаем

$$\begin{aligned}
\theta_{31}(s) \Big|_{s_{k,1} \text{ очн}} &= e^{\frac{2\pi i}{8}} \left[ e^{-\frac{2\pi i}{8}} e^{\frac{2\pi i}{8} M_6} \exp \left( \frac{w_1 + w_3}{w_1 - w_3} i\tilde{k}b \right) \exp \left( -\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_3} i\tilde{k}b \right) \right. \\
&\quad \times \int_0^\pi r(t) \exp \left( -\frac{w_1 + w_3}{w_1 - w_3} i\tilde{k}t \right) \exp \left( -\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_3} i\tilde{k}t \right) dt_{r1} \\
&\quad \left. - e^{-\frac{2\pi i}{8}} e^{\frac{2\pi i}{8} M_6} \exp \left( \frac{w_1 + w_3}{w_1 - w_3} i\tilde{k}b \right) \exp \left( \frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_3} i\tilde{k}b \right) \right. \\
&\quad \left. \times \int_0^\pi r(t) \exp \left( -\frac{w_1 + w_3}{w_1 - w_3} i\tilde{k}t \right) \exp \left( \frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_3} i\tilde{k}t \right) dt_{r3} \right].
\end{aligned} \tag{80}$$

Из формул (5) получаем

$$\frac{w_1 + w_3}{w_1 - w_3} = \frac{1 + e^{\frac{4\pi i}{8}}}{1 - e^{\frac{4\pi i}{8}}} i = \frac{e^{\frac{2\pi i}{8}} (e^{-\frac{2\pi i}{8}} + e^{\frac{2\pi i}{8}})}{e^{\frac{2\pi i}{8}} (e^{-\frac{2\pi i}{8}} - e^{\frac{2\pi i}{8}})} i = -\text{ctg} \left( \frac{2\pi}{8} \right). \tag{81}$$

Подставляя (81) в формулу (80), выводим

$$\begin{aligned} \theta_{31}(s)|_{s_{k,1\text{очн}}} &= e^{\frac{2\pi i}{8}} e^{-\text{ctg}(\frac{\pi}{4})\tilde{k}b} \int_0^\pi r(t) e^{\text{ctg}(\frac{\pi}{4})\tilde{k}b} (-1) \left[ \exp\left(i\tilde{k}t + \frac{2\pi}{8} - \frac{2\pi}{8}M_6 + i\tilde{k}b\right) \right. \\ &\quad \left. - \exp\left(-i\tilde{k}t - \frac{2\pi}{8} + \frac{2\pi}{8}M_6 - i\tilde{k}b\right) \right] dt \\ &= (-2i) e^{\frac{2\pi i}{8}} e^{-\tilde{k}b} \int_0^\pi r(t) e^{\tilde{k}t} \sin\left[i\tilde{k}t + i\tilde{k}b + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi M_6}{4}\right] dt_{b2}. \end{aligned} \quad (82)$$

Аналогичным образом из формул (5), (79) и (70) выводим

$$\theta_{32}(s)|_{s_{k,1\text{очн}}} = (-2i) e^{\frac{2\pi i}{8}} e^{-\tilde{k}b} \int_0^\pi r(t) e^{\tilde{k}t} \sin\left[\tilde{k}t - \tilde{k}b + \frac{\pi}{4}\right] dt_{b3}. \quad (83)$$

Подставляя формулы (75)–(83) в уравнение (74), видим, что коэффициенты при  $\tilde{k}^0$  сокращаются, а приравнявая коэффициенты при  $\frac{1}{\tilde{k}^7}$ , находим

$$\begin{aligned} d_{7k,1} &= \frac{(w_1 - w_2)^8 i}{2\pi i 8 \cdot 2^7 i^8} \left\{ \frac{\theta_1(s)|_{s_{k,1\text{очн}}}}{w_1 - w_3} + \frac{\theta_2(s)|_{s_{k,1\text{очн}}}}{w_1 - w_3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha}{w_1 - w_3} \left[ \theta_{31}(s)|_{s_{k,1\text{очн}}} + \theta_{32}(s)|_{s_{k,1\text{очн}}} \right] \right\}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (84)$$

Из формулы (5) получаем

$$w_1 - w_3 = 1 - e^{\frac{4\pi i}{8}} = e^{\frac{2\pi i}{8}} \left( e^{-\frac{2\pi i}{8}} - e^{\frac{2\pi i}{8}} \right) = (-2i) e^{\frac{2\pi i}{8}} \sin\left(\frac{2\pi}{8}\right). \quad (85)$$

С помощью формул (75)–(83) и (85) из (84) находим

$$\begin{aligned} d_{7k,1} &= \frac{(w_1 - w_3)^8}{8\pi 2^8} \left\{ \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a11} + \frac{(-2i) e^{\frac{2\pi i}{8}}}{w_1 - w_3} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{b1} - \frac{\alpha}{w_1 - w_3} (-2i) e^{\frac{2\pi i}{8}} e^{-\tilde{k}b} \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^\pi r(t) e^{\tilde{k}t} \left[ \sin\left(\tilde{k}t - \tilde{k}b + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\tilde{k}t + \tilde{k}b + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi M_6}{4}\right) \right] dt \right\}. \end{aligned} \quad (86)$$

Применяя формулы

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right), \quad \frac{2ie^{\frac{2\pi i}{8}}}{w_1 - w_3} = \frac{2ie^{\frac{2\pi i}{8}}}{(-2i)e^{\frac{2\pi i}{8}} \sin(\frac{2\pi}{8})} = -\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4})},$$

из (86) выводим

$$\begin{aligned} d_{7k,1} &= \frac{(\sin(\frac{\pi}{4}))^8}{8\pi} \left\{ \int_0^\pi q(t) dt_{a11} + \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4})} \int_0^\pi q(t) \sin\left[2\tilde{k}t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi M_6}{4}\right] dt_{b1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\alpha}{\sin(\frac{\pi}{4})} e^{-\tilde{k}b} \sin\left(\tilde{k}b - \frac{\pi M_6}{8}\right) \int_0^\pi r(t) e^{\tilde{k}t} \cos\left[\tilde{k}t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi M_6}{8}\right] dt_{b4} \right\}, \quad (87) \\ &\quad \tilde{k} = k + \frac{M_6}{8} + \frac{N_2}{8}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$



Формула (87) показывает, что коэффициенты  $d_{7k,1}$  формулы (71) находятся единственным образом, тем самым теорема 6 доказана.  $\triangleright$

Аналогичным образом изучаются сектора 2)–8) индикаторной диаграммы на рис. 1.

**Теорема 7.** Асимптотика собственных значений ФДО (1)–(3) в секторах 2)–8) индикаторной диаграммы представляется в следующем виде:

$$s_{k,2} = s_{k,1} e^{\frac{2\pi i}{8}}; \quad s_{k,3} = s_{k,2} e^{\frac{2\pi i}{8}} = s_{k,1} e^{\frac{4\pi i}{8}}; \quad \dots; \quad s_{k,m} = s_{k,m-1} e^{\frac{2\pi i}{8}} = s_{k,1} e^{\frac{2\pi i}{8}(m-1)},$$

$$\lambda_{k,m} = (s_{k,m})^8, \quad m = 1, 2, \dots, 8,$$

при этом  $s_{k,1}$  определены формулами (70), (71), (87).

## Литература

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы.—М.: Наука.—1969.—528 с.
2. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Мат. сб.—1968.—Т. 75 (117), № 4.—С. 558–566.
3. Садовничий В. А. О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков // Мат. сб.—1967.—Т. 72 (114), № 2.—С. 293–317.
4. Лидский В. В., Садовничий В. А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Функцион. анализ и его прил.—1967.—Т. 1, № 2.—С. 52–59.
5. Митрохин С. И. О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами // Вестн. МГУ. Сер. Математика. Механика.—1986.—№ 6.—С. 3–6.
6. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами // Диф. уравнения.—1992.—Т. 28, № 3.—С. 530–532.
7. Митрохин С. И. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией // Докл. РАН.—1997.—Т. 356, № 1.—С. 13–15.
8. Мартинович М. Об одной краевой задаче для функционально-дифференциального уравнения // Диф. уравнения.—1982.—Т. 18, № 2.—С. 239–245.
9. Мартинович М. Дзета-функция и формулы следов для одной краевой задачи с функционально-дифференциальным уравнением // Диф. уравнения.—1982.—Т. 18, № 3.—С. 537–540.
10. Митрохин С. И. О формулах следов для одной краевой задачи с функционально-дифференциальным уравнением с разрывным коэффициентом // Диф. уравнения.—1986.—Т. 22, № 6.—С. 927–931.
11. Виокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма — Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Изв. РАН. Сер. Математика.—2000.—Т. 64, № 4.—С. 47–106. DOI: 10.4213/im295.
12. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма — Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки.—1999.—Т. 66, № 6.—С. 897–912. DOI: 10.4213/mzm1234.
13. Савчук А. М. Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма — Лиувилля с  $\delta$ -потенциалом // Успехи мат. наук.—2000.—Т. 55, № 6 (336).—С. 155–156. DOI: 10.4213/rm352.
14. Митрохин С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами // Вестн. МГУ. Сер. Математика. Механика.—2009.—№ 3.—С. 102–104.
15. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциальных операторов нечетного порядка с суммируемым потенциалом // Диф. уравнения.—2011.—Т. 47, № 12.—С. 1808–1811.
16. Митрохин С. И. Об исследовании дифференциального оператора с суммируемым потенциалом с разрывной весовой функцией // Уфимский мат. журн.—2017.—Т. 9, № 4.—С. 74–86.
17. Митрохин С. И. Периодическая краевая задача для дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемым потенциалом // Владикавк. мат. журн.—2017.—Т. 19, № 4.—С. 35–49. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.9166.
18. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения.—М.: Мир.—1967.—548 с.
19. Митрохин С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора со знакопеременной весовой функцией // Изв. вузов. Математика.—2018.—№ 6.—С. 31–47.

20. Садовничий В. А., Любишкин В. А., Белабаси Ю. О регуляризованных суммах корней целой функции одного класса // Докл. АН СССР.—1980.—Т. 254, № 6.—С. 1346–1348.
21. Садовничий В. А., Любишкин В. А. О некоторых новых результатах теории регуляризованных следов дифференциальных операторов // Диф. уравнения.—1982.—Т. 18, № 1.—С. 109–116.

*Статья поступила 30 мая 2018 г.*

МИТРОХИН СЕРГЕЙ ИВАНОВИЧ  
 НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова,  
 старший научный сотрудник  
 РОССИЯ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1  
 E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

*Vladikavkaz Mathematical Journal*  
 2019, Volume 21, Issue 2, P. 38–57

ON THE STUDY OF THE SPECTRUM  
 OF A FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL OPERATOR  
 WITH A SUMMABLE POTENTIAL

Mitrokhin, S. I.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Lomonosov Moscow State University,  
 1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia  
 E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

**Abstract.** The paper deals with a functional-differential operator of the eighth order with a summable potential. The boundary conditions are separated. Functional-differential operators of this kind arise in the study of vibrations of beams and bridges made up of materials of different density. To solve the functional-differential equation that defines a differential operator, the method of variation of constants is applied. The solution of the initial functional-differential equation is reduced to the solution of the Volterra integral equation. The resulting Volterra integral equation is solved by Picard's method of successive approximations. As a result of the investigation of the integral equation, asymptotic formulas and estimates for the solutions of the functional-differential equation that defines the differential operator are obtained. For large values of the spectral parameter, the asymptotics of the solutions of the differential equation defining the differential operator is derived. Similar to the asymptotic estimates of solutions of the differential operator of the second order with smooth and piecewise smooth coefficients, asymptotic estimates of solutions of the initial functional differential equation are established. The obtained asymptotic formulas are used to study the boundary conditions. As a result, we come to the study of the roots of a function represented as a determinant of the eighth order. To find the roots of this function, it is necessary to study the indicator diagram. The roots of the eigenvalue equation are in eight sectors of an infinitesimal solution, defined by the indicator diagram. The behavior of the roots of this equation in each of the sectors of the indicator diagram and the asymptotics of the eigenvalues of the differential operator under study are studied.

**Key words:** functional-differential operator, boundary value problem, summable potential, boundary conditions, spectral parameter, indicator diagram, asymptotics of the eigenvalues.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 34K08.

**For citation:** Mitrokhin, S. I. On the Study of the Spectrum of a Functional-Differential Operator with a Summable Potential, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 2, pp. 38–57 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32116.

## References

1. Naimark, M. A. *Lineynye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators], Moscow, Nauka, 1969, 528 p. (in Russian).
2. Lidskiy, V. B. and Sadovnichiy, V. A. Asymptotic Formulas for the Zeros of a Class of Entire Functions, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 519–527. DOI: 10.1070/SM1968v004n04ABEH002812.

3. Sadovnichiy, V. A. About Traces of Ordinary Differential Operators of the Highest Orders, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 263–288. DOI: 10.1070/SM1967v001n02ABEH001979.
4. Lidskiy, V. B. and Sadovnichiy, V. A. The Trace of Ordinary Differential Operators of High Order, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 263–288. DOI: 10.1070/SM1967v001n02ABEH001979.
5. Mitrokhin, S. I. About Formulas of Regularized Traces for Differential Operators of the Second Order with Discontinuous Coefficients, *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya: matematika, mehanika* [Vestnik MGU. Ser. Mathematics, Mechanics], 1986, no. 6, pp. 3–6 (in Russian).
6. Mitrokhin, S. I. About Spectral Properties of Differential Operators with Discontinuous Coefficients, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1992, vol. 28, no. 3, pp. 530–532 (in Russian).
7. Mitrokhin, S. I. About Some Spectral Properties of Differential Operators of the Second Order with Discontinuous Weight Function, *Doklady RAN* [Reports of the Russian Academy of Sciences], 1997, vol. 356, no. 1, pp. 13–15 (in Russian).
8. Martinovich, M. On a Boundary Value Problem for a Functional-Differential Equation, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1982, vol. 18, no. 2, pp. 239–245 (in Russian).
9. Martinovich, M. The Zeta-Function and Trace Formulas for one Boundary-Value Problem with a Functional-Differential Equation, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1982, vol. 18, no. 3, pp. 537–540 (in Russian).
10. Mitrokhin, S. I. On the Trace Formulas for a Boundary Value Problem with a Functional-Differential Equation with a Discontinuous Coefficient, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1986, vol. 22, № 6, pp. 927–931 (in Russian).
11. Vinokurov, V. A. and Sadovnichii, V. A. Asymptotics of any Order for the Eigenvalues and Eigenfunctions of the Sturm–Liouville Boundary-Value Problem on a Segment with a Summable Potential, *Izvestiya: Mathematics*, 2000, vol. 64, no. 4, pp. 695–754. DOI: 10.1070/IM2000v064n04ABEH000295.
12. Sachuk, A. M. and Shkalikov, A. A. Sturm–Liouville Operators with Singular Potentials, *Mathematical Notes*, 1999, vol. 66, no. 6, pp. 741–753. DOI: 10.1007/BF02674332.
13. Sachuk, A. M. First-Order Regularised Trace of the Sturm–Liouville Operator with  $\delta$ -Potential, *Russian Mathematical Surveys*, 2000, vol. 55, no. 6, pp. 1168–1169.
14. Mitrokhin, S. I. The Asymptotics of the Eigenvalues of a Fourth Order Differential Operator with Summable Coefficients, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2009, vol. 64, no. 3, pp. 102–104. DOI: 10.3103/S0027132209030024.
15. Mitrokhin, S. I. On the Spectral Properties of Odd-Order Differential Operators with Integ-  
rable Potential, *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 12, pp. 1833–1836. DOI: 10.1134/S00122  
66111120123.
16. Mitrokhin, S. I. Study of Differential Operator with Summable Potential with Discontinuous Weight  
Function, *Ufa Mathematical J.*, 2017, vol. 9, no. 4, pp. 72–84. DOI: 10.13108/2017-9-4-72.
17. Mitrokhin, S. I. A Periodic Boundary Value Problem for a Fourth Order Differential Operator  
with a Summable Potential, *Vladikavkaz Math. J.*, 2017, vol. 19, no. 1, pp. 35–49. DOI: 10.23671/  
VNC.2018.4.9166.
18. Bellman, R. and Cooke, K. L. *Differential-Difference Equations*, New York, Academic Press, 1963,  
482 p.
19. Mitrokhin, S. I. Asymptotics of Eigenvalues of Differential Operator With Alternating Weight  
Function, *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2018, vol. 62, no. 6, pp. 27–42. DOI:  
10.3103/S1066369X1806004X.
20. Sadovnichii, V. A., Lubishkin, V. A. and Belabassi Yu. On Regularized Sums of Roots of an Entire  
Function of a Certain Class, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1980, vol. 254, no. 6, pp. 1346–1348 (in Russian).
21. Sadovnichii, V. A. and Lubishkin, V. A. Some New Results of the Theory of Regularized Traces  
of Differential Operators, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1982, vol. 18, no. 1,  
pp. 109–116 (in Russian).

Received May 30, 2018

SERGEI I. MITROKHIN  
Lomonosov Moscow State University,  
1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia,  
Senior Researcher  
E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

УДК 517.958

DOI 10.23671/VNC.2019.2.32117

## К ВОПРОСУ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТРИЧНОГО ЯДРА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Ж. Д. Тотиева<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Южный математический институт — филиал ВНИЦ РАН,  
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

<sup>2</sup> Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,  
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46

E-mail: jannatuaeva@inbox.ru

**Аннотация.** Рассматривается обратная задача определения матричного ядра  $K(t) = (K_1, K_2, K_3)(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , входящего в систему интегро-дифференциальных уравнений анизотропной вязкоупругости. Прямая начально-краевая задача состоит в определении вектор-функции смещения  $u(x, t) = (u_1, u_2, u_3)(x, t)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $x_3 > 0$ . Предполагается, что коэффициенты уравнений системы (плотность и модули упругости) зависят только от пространственной переменной  $x_3 > 0$ . Источник возмущения упругих волн сосредоточен на границе области  $x_3 = 0$  и представляет собой дельта-функцию Дирака (граничное условие Неймана специального вида). Обратная задача сводится к изученным ранее задачам определения скалярных ядер  $K_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . В качестве дополнительного условия задается значение преобразования Фурье по  $x_2$  от функции  $u(x, t)$  на поверхности  $x_3 = 0$ . Приводятся теоремы глобальной однозначной разрешимости и устойчивости решения обратной задачи. Идея доказательства глобальной разрешимости состоит в применении принципа сжатых отображений к системе нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода в банаховом пространстве с весовыми нормами.

**Ключевые слова:** обратная задача, устойчивость, дельта-функция, модули упругости, матричное ядро.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 35L20, 35R30, 35Q99.

**Образец цитирования:** Тотиева Ж. Д. К вопросу исследования задачи определения матричного ядра системы уравнений анизотропной вязкоупругости // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 2.—С. 58–66. DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32117.

### 1. Введение

Многим средам (материалам) свойственна зависимость процессов деформирования от скорости и времени, которая отсутствует в уравнениях теории упругости. Такие среды проявляют как мгновенную, так и замедленную реакцию на нагрузку. Это свойство называют памятью. Другая особенность состоит в том, что в средах с памятью сочетаются способности запасать энергию подобно упругим телам и рассеивать подобно средам с вязкими свойствами. Такие среды (материалы) называются *вязкоупругими*. Более точное исследование с помощью математических методов процесса распространения электромагнитных, акустических и упругих волн в вязкоупругих средах требует учета памяти (предыстории) процесса. Для электромагнитных волн это связано с явлением дисперсии

волн, а для акустических и упругих волн — с наличием вязкости среды. Сама теория линейной вязкоупругости достаточно развита и доступна для широкого применения (см. [1–4] и цитированную там литературу). Но, как отмечается в работе [5], «многие математические свойства линейного определяющего соотношения вязкоупругости — даже напрямую связанные с моделированием классических реологических эффектов и типичных кривых поведения материалов — еще малоизвестны, полный арсенал возможностей линейной теории не выявлен, область ее адекватности до сих пор не очерчена достаточно четко и явно, а компьютерное моделирование нередко остается без необходимого фундамента».

Необходимость разработки методов решения обратных задач теории волновых процессов в вязкоупругих средах обуславливает актуальность данного исследования.

Статья обобщает результаты работы [6] на случай матричного ядра. В ней определялось одномерное скалярное ядро интегрального оператора типа свертки, входящего в систему изотропной вязкоупругости для сосредоточенного источника возмущений, локализованного на границе рассматриваемой области. При этом в качестве дополнительной информации задавался след решения прямой задачи на поверхности  $x_3 = 0$ . В работах [6–9] приводится подробный обзор имеющихся публикаций по данному направлению исследований. Можно добавить к имеющемуся обзору работы [10, 11], в которых решены задачи по определению скалярных ядер для интегро-дифференциальных уравнений акустики и SH-волн в вязкоупругой пористой среде соответственно. Работы [12, 13] содержат результаты по определению матричных ядер для системы уравнений анизотропной вязкоупругости для однородной среды и для случая изотропной вязкоупругости с источником возмущения типа направленного взрыва для неоднородной среды.

Полная система дифференциальных уравнений для неоднородной анизотропной вязкоупругой среды состоит из следующих уравнений:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

Здесь  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\rho = \rho(x)$  — плотность неоднородной среды,  $\rho(x) > 0$ ,  $u = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$  — вектор смещений.

В вязкоупругих материалах для тензора напряжений имеют место представления:

$$T_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 c_{ijkl} \left[ S_{kl} + \int_0^t K_i(t-\tau) S_{kl}(x, \tau) d\tau \right], \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.2)$$

где

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad k = 1, 2, 3, \quad l = 1, 2, 3,$$

$c_{ijkl} = c_{ijkl}(x)$  — модули упругости,  $K(t) = (K_1, K_2, K_3)(t)$  — функция релаксации среды. Симметричность тензора напряжений уменьшает число независимых модулей упругости с 81 до 21. Если принять, что  $c_{\alpha\beta} = c_{ijkl}$ , где  $\alpha = (ij)$  и  $\beta = (kl)$ , в соответствии с обозначениями (11)  $\rightarrow 1$ , (22)  $\rightarrow 2$ , (33)  $\rightarrow 3$ , (23) = (32)  $\rightarrow 4$ , (13) = (31)  $\rightarrow 5$ , (12) = (21)  $\rightarrow 6$ , то матрице независимых модулей упругости можно придать вид симметрической матрицы порядка  $6 \times 6$ , поскольку в паре индексов  $(i, j)$  порядок не играет роли и существует только шесть различных парных комбинаций. Будем рассматривать анизотропные среды с матрицей независимых модулей упругости следующего вида:

$$c_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & & & \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & & & \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & & & \\ & & & O_{(3 \times 3)} & & \\ & & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & c_{44} & 0 \\ & & & & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим при  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x_3 > 0$ , систему интегро-дифференциальных уравнений динамической вязкоупругости (1.1)–(1.2)

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad x_3 > 0, \quad (2.1)$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$u_j|_{t < 0} \equiv 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

$$T_{j3}|_{x_3=+0} = f_j(x_1, t), \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

Далее предполагаем, что модули упругости  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{44}$  и плотность  $\rho$  являются функциями только одной переменной  $x_3$ , а вектор-функция  $(c_{11}, c_{12}, c_{44}, \rho)$  принадлежит классу  $\Lambda(m)$ ,  $m = \text{const}$ :

$$\Lambda(m) = \left\{ (c_{11}(x_3), c_{12}(x_3), c_{44}(x_3), \rho(x_3)) : \right. \\ \left. c_{11} \geq m > 0, \quad c_{44} \geq m > 0, \quad c_{11} > c_{12}, \quad c_{11} + 2c_{12} > 0, \quad \rho \geq m > 0, \right. \\ \left. c'_{11}(+0) = 0, \quad c'_{44}(+0) = 0, \quad \rho'(+0) = 0, \right. \\ \left. c_{11}, c_{44}, \rho \in C^2(\mathbb{R}_+), \quad c_{12} \in C(\mathbb{R}_+) \right\}, \quad \mathbb{R}_+ := [0, \infty).$$

Определим билинейный интегральный оператор  $L$  по формуле

$$L[K(t), u(x, t)] = u(x, t) + \int_0^t K(t - \tau) u(x, \tau) d\tau$$

(здесь  $K(t)$ ,  $u(x, t)$  – скалярные функции). В дальнейшем для сокращения записи иногда не будем в операторе  $L$  указывать зависимость функций от переменных, подразумевая зависимость первой – от  $t$ , а второй – от  $x, t$ .

Равенства (2.1)–(2.3) для анизотропных сред с матрицей (1.3) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = L \left[ K_1, \frac{\partial}{\partial x_3} \left( c_{44} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + c_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \right. \\ \left. + c_{44} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (c_{12} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right], \quad (2.4)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = L \left[ K_2, \frac{\partial}{\partial x_3} \left( c_{44} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) + c_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + c_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + c_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (c_{12} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right], \quad (2.5)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = L \left[ K_3, \frac{\partial}{\partial x_3} \left( c_{11} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + c_{44} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( c_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + c_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( c_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + c_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right], \quad (2.6)$$

$$L \left[ K_1, c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + c_{44} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right] \Big|_{x_3=+0} = f_1(x_1, t), \quad (2.7)$$

$$L \left[ K_2, c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + c_{44} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right] \Big|_{x_3=+0} = f_2(x_1, t), \quad (2.8)$$

$$L \left[ K_3, c_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{11} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] \Big|_{x_3=+0} = f_3(x_1, t), \quad (2.9)$$

$$u_i|_{t<0} \equiv 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

Задачу определения вектора смещения  $u(x, t)$ , удовлетворяющего (в обобщенном смысле) равенствам (2.1)–(2.3) при заданных функциях  $\rho(x_3)$ ,  $c_{11}(x_3)$ ,  $c_{12}(x_3)$ ,  $c_{44}(x_3)$ ,  $K_j(t)$ ,  $f_j(x_1, t)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , будем называть *прямой задачей*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как коэффициенты уравнений и граничные условия в системе (2.4)–(2.10) не зависят от переменной  $x_2$ , то решение прямой задачи  $u$  также не будет зависеть от  $x_2$  [14].

Запишем соотношения (2.4)–(2.10) в терминах преобразования Фурье по переменной  $x_1$ . Имеем

$$\rho \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = L \left[ K_1, \frac{\partial}{\partial x_3} \left( c_{44} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right) + i\nu c_{12} \frac{\partial U_3}{\partial x_3} + i\nu \frac{\partial}{\partial x_3} (c_{44} U_3) - \nu^2 c_{11} U_1 \right], \quad (2.11)$$

$$\rho \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = L \left[ K_2, \frac{\partial}{\partial x_3} \left( c_{44} \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right) - \nu^2 c_{44} U_2 \right], \quad (2.12)$$

$$\rho \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} = L \left[ K_3, \frac{\partial}{\partial x_3} \left( c_{11} \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) + i\nu c_{44} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + i\nu \frac{\partial}{\partial x_3} (c_{12} U_1) - \nu^2 c_{44} U_3 \right], \quad (2.13)$$

$$L \left[ K_1, i c_{44} \nu U_3 + c_{44} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right] \Big|_{x_3=+0} = F_1(\nu, t), \quad (2.14)$$

$$L \left[ K_2, c_{44} \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right] \Big|_{x_3=+0} = F_2(\nu, t), \quad (2.15)$$

$$L \left[ K_3, i\nu c_{12} U_1 + c_{11} \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right] \Big|_{x_3=+0} = F_3(\nu, t), \quad (2.16)$$

$$U_j|_{t<0} \equiv 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.17)$$

где

$$U_j(x_3, t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_3, t) \exp(i\nu x_1) dx_1, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$F_j(t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x_1, t) \exp(i\nu x_1) dx_1, \quad j = 1, 2, 3,$$

$\nu$  — параметр, функции  $U_j, \phi \in C^1(\mathbb{R}; C(\tilde{D}))$ ,  $\tilde{D} = \{(x_3, t) : x_3 \geq 0, 0 \leq t \leq T\}$ ,  $T > 0$ .

Систему (2.11)–(2.17) можно рассматривать как совокупность двух подсистем. Первая включает равенства (2.11), (2.13), (2.14), (2.16), (2.17) и определяет функции  $U_1$  и  $U_3$ . Вторая — (2.12), (2.15), (2.17) определяет функцию  $U_2$ .

**Обратная задача.** Пусть

$$f_j(x_1, t) = \delta'(t)\delta(x_1), \quad j = 1, 2, 3;$$

где  $\delta'(t)$  — производная дельта-функции Дирака,  $\delta(x_1)$  — дельта-функция Дирака. Определить ядро  $K(t) = \text{diag}(K_1, K_2, K_3)(t)$ ,  $t > 0$ , входящее в равенства (2.1) посредством формулы (1.2), если относительно вектор-функции  $(U_1, U_2, U_3)$  решения прямой задачи известна дополнительная информация

$$U_j(x_3, t, \nu)|_{x_3=+0, \nu=+0} = g_j(t), \quad t > 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.18)$$

где  $g_j(t)$  — заданные функции.

### 3. Решение обратной задачи

Из равенств (2.11)–(2.17) для функций

$$U_j^1 = U_j(x_3, t, \nu)|_{\nu=+0}, \quad j = 1, 2, 3,$$

получаем независимо решаемые задачи (3.1)–(3.2), (3.3)–(3.4) и (3.5)–(3.6)

$$\rho \frac{\partial^2 U_1^1}{\partial t^2} = L \left[ K_1, \frac{\partial}{\partial x_3} \left( c_{44} \frac{\partial U_1^1}{\partial x_3} \right) \right], \quad (3.1)$$

$$U_1^1|_{t < 0} \equiv 0, \quad L \left[ K_1, c_{44} \frac{\partial U_1^1}{\partial x_3} \right] \Big|_{x_3=+0} = \delta'(t), \quad (3.2)$$

$$\rho \frac{\partial^2 U_2^1}{\partial t^2} = L \left[ K_2, \frac{\partial}{\partial x_3} \left( c_{44} \frac{\partial U_2^1}{\partial x_3} \right) \right], \quad (3.3)$$

$$U_2^1|_{t < 0} \equiv 0, \quad L \left[ K_2, c_{44} \frac{\partial U_2^1}{\partial x_3} \right] \Big|_{x_3=+0} = \delta'(t), \quad (3.4)$$

$$\rho \frac{\partial^2 U_3^1}{\partial t^2} = L \left[ K_3, \frac{\partial}{\partial x_3} \left( c_{11} \frac{\partial U_3^1}{\partial x_3} \right) \right], \quad (3.5)$$

$$U_3^1|_{t < 0} \equiv 0, \quad L \left[ K_3, c_{11} \frac{\partial U_3^1}{\partial x_3} \right] \Big|_{x_3=+0} = \delta'(t). \quad (3.6)$$



Введем в рассмотрение новые переменные  $y, z$  по формулам

$$y = \psi_1(x_3) := \int_0^{x_3} \frac{d\xi}{v_1(\xi)}, \quad v_1(x_3) := \sqrt{\frac{c_{44}(x_3)}{\rho(x_3)}},$$

$$z = \psi_2(x_3) := \int_0^{x_3} \frac{d\xi}{v_2(\xi)}, \quad v_2(x_3) := \sqrt{\frac{c_{11}(x_3)}{\rho(x_3)}}.$$

Через  $\psi_j^{-1}$  обозначим функцию, обратную к  $\psi_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Пусть

$$v_i(y, t) := \frac{U_i^1(\psi_1^{-1}(y), t)}{s(y)}, \quad i = 1, 2; \quad s(y) := \sqrt{\frac{v_1(+0)\rho(+0)}{v_1(\psi_1^{-1}(y))\rho(\psi_1^{-1}(y))}},$$

$$v_3(z, t) := \frac{U_3^1(\psi_2^{-1}(z), t)}{p(z)}, \quad p(z) := \sqrt{\frac{v_2(+0)\rho(+0)}{v_2(\psi_2^{-1}(z))\rho(\psi_2^{-1}(z))}}.$$

Тогда обратная задача в терминах вновь введенных функций и переменных  $y, z$  приводится к задаче определения матричного ядра  $K(t) = \text{diag}(K_1, K_2, K_3)(t)$  из следующих соотношений:

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} = L \left[ K_j, \frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2} + q(y)v_j \right], \quad y > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

$$L \left[ K_j, \frac{\partial v_j(y, t)}{\partial y} \right]_{y=+0} = a\delta'(t), \quad j = 1, 2, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = L \left[ K_3, \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} + \tilde{q}(z)v_3 \right], \quad z > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

$$L \left[ K_3, \frac{\partial v_3(z, t)}{\partial z} \right]_{z=+0} = b\delta'(t), \quad (3.10)$$

$$v_j|_{t<0} \equiv 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.11)$$

$$v_j(+0, t) = g_j(t), \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.12)$$

где

$$q(y) := \frac{s''(y)}{s(y)} - 2 \left[ \frac{s'(y)}{s(y)} \right]^2, \quad \tilde{q}(z) := \frac{p''(z)}{p(z)} - 2 \left[ \frac{p'(z)}{p(z)} \right]^2,$$

$$a := [c_{44}(+0)\rho(+0)]^{-\frac{1}{2}}, \quad b := [c_{11}(+0)\rho(+0)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Задача (3.7)–(3.12) распадается на три независимые задачи по определению  $K_1(t)$ ,  $K_2(t)$ ,  $K_3(t)$  соответственно. Решение каждой задачи может быть проведено аналогично исследованию обратной задачи, изученной в [6].

Таким образом, из [6] следует справедливость следующих теорем однозначной глобальной разрешимости и устойчивости обратной задачи определения матричного ядра (доказательство проводится по аналогии для каждого элемента  $K_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ):

**Теорема 1.** Пусть функция  $g_j(t)$  представима в виде

$$g_j(t) = A_j\delta(t) + \theta(t)g_{0j}(t), \quad (A_1, A_2, A_3) := (a, a, b)$$

и  $g_{0j}(t) \in C^2[0, T]$ ,  $j = 1, 2, 3$ ;  $\theta(t)$  — функция Хевисайда. Кроме того,  $(\rho, c_{44}) \in C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]$ ,  $c_{11} \in C^3[0, \psi_2^{-1}(T/2)]$ . Тогда существует единственное решение обратной задачи  $K(t) = \text{diag}(K_1, K_2, K_3)(t)$ ,  $t \in C^2[0, T]$ , при любом фиксированном  $T > 0$ .

Пусть  $\Gamma(h_0)$  — множество скалярных функций  $K(t) \in C^2[0, T]$ , удовлетворяющих для  $t \in [0, T]$  неравенству  $\|K(t)\|_{C^2[0, T]} \leq h_0$  с фиксированной положительной постоянной  $h_0$ . Эта постоянная определена в [6].

**Теорема 2.** Пусть  $K(t) = \text{diag}(K_1, K_2, K_3)(t)$ ,  $K^*(t) = \text{diag}(K_1^*, K_2^*, K_3^*)(t)$ ,  $K_j(t), K_j^*(t) \in \Gamma(h_{0j})$ ,  $j = 1, 2, 3$ , — решения обратной задачи с набором данных

$$\{\rho(\psi_1^{-1}(y)), c_{44}(\psi_1^{-1}(y)), c_{11}(\psi_2^{-1}(z)), g_{0j}(t)\},$$

$$\{\rho^*(\psi_1^{-1}(y)), c_{44}^*(\psi_1^{-1}(y)), c_{11}^*(\psi_2^{-1}(z)), g_{0j}^*(t)\}$$

соответственно. Тогда найдется такое положительное число  $C = C(m, h_0, h_{00}, T)$ ,

$$h_{00} = \max \left\{ \|\rho\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]}, \|c_{44}\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]}, \|c_{11}\|_{C^3[0, \psi_2^{-1}(T/2)]}, \|g_{0j}(t)\|_{C^2[0, T]}, \right.$$

$$\left. \|\rho^*\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]}, \|c_{44}^*\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]}, \|c_{11}^*\|_{C^3[0, \psi_2^{-1}(T/2)]}, \|g_{0j}^*(t)\|_{C^2[0, T]} \right\},$$

что справедлива оценка устойчивости

$$\sum_{j=1}^3 \|K_j(t) - K_j^*(t)\|_{C^3[0, T]} \leq C \left[ \|\rho - \rho^*\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]} + \|c_{44} - c_{44}^*\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]} \right.$$

$$\left. + \|c_{11} - c_{11}^*\|_{C^3[0, \psi_2^{-1}(T/2)]} + \sum_{j=1}^3 \|g_{0j} - g_{0j}^*\|_{C^2[0, T]} \right].$$

◁ Из [6] следуют оценки

$$\|K_1(t) - K_1^*(t)\|_{C^2[0, T]} \leq C \left[ \|\rho - \rho^*\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]} + \|c_{44} - c_{44}^*\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]} \|g_{01} - g_{01}^*\|_{C^2[0, T]} \right],$$

$$\|K_2(t) - K_2^*(t)\|_{C^2[0, T]} \leq C \left[ \|\rho - \rho^*\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]} + \|c_{44} - c_{44}^*\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]} \|g_{02} - g_{02}^*\|_{C^2[0, T]} \right],$$

$$\|K_3(t) - K_3^*(t)\|_{C^2[0, T]} \leq C \left[ \|\rho - \rho^*\|_{C^3[0, \psi_1^{-1}(T/2)]} + \|c_{11} - c_{11}^*\|_{C^3[0, \psi_2^{-1}(T/2)]} + \|g_{03} - g_{03}^*\|_{C^2[0, T]} \right].$$

Складывая почленно эти неравенства, мы получаем требуемую оценку. ▷

## Литература

1. Кристенсен Р. М. Введение в теорию вязкоупругости.—М.: Мир, 1974.—340 с.
2. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел.—М.: Наука, 1977.—384 с.
3. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела.—М.: Наука, 1988.—712 с.
4. Pipkin A. C. Lectures on Viscoelasticity Theory.—Berlin: Springer, 1986.—199 p.
5. Хохлов А. В. Качественный анализ общих свойств теоретических кривых линейного определяющего соотношения вязкоупругости // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э.Баумана.—2016.—№ 5.—С. 187–245.
6. Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д. Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. матем.—2013.—Т. 16, № 2.—С. 72–82.
7. Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д. Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 4.—С. 18–43. DOI: 10.23671/VNC.2015.4.5969.

8. Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д. Задача об определении одномерного ядра электровязкоупругости // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 58, № 3.—С. 553–572. DOI: 10.17377/smzh.2017.58.307.
9. Тотиева Ж. Д., Дурдиев Д. К. Задача об определении одномерного ядра уравнения термовязкоупругости // Мат. заметки.—2018.—Т. 103, № 1.—С. 129–146. DOI: 10.4213/mzm10752.
10. Сафаров Ж. Ш., Дурдиев Д. К. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения акустики // Диф. уравнения.—2018.—Т. 54, № 1.—С. 136–147.
11. Дурдиев Д. К., Рахмонов А. А. Обратная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений SH-волн в вязкоупругой пористой среде: глобальная разрешимость // Теор. и мат. физика.—2018.—Т. 195, № 3.—С. 491–506. DOI: 10.4213/tmf9480.
12. Durdiev D. K., Durdiev U. D. The problem of kernel determination from viscoelasticity system integro-differential equations for homogeneous anisotropic media // Наносистемы: физика, химия, математика.—2016.—Т. 7, № 3.—С. 405–409. DOI: 10.17586/2220-8054-2016-7-3-405-409.
13. Durdiev D. K., Totieva Zh. D. The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equations // Math. Meth. Appl. Sci.—2018.—Vol. 17, № 17.—P. 8019–8032. DOI: 10.1002/mma.5267.
14. Туаева Ж. Д. Многомерная математическая модель сейсмике с памятью // Исслед. по диф. уравнениям и мат. моделированию.—Владикавказ: ВНИЦ РАН, 2008.—С. 297–306.

*Статья поступила 14 июня 2018 г.*

ТОТИЕВА ЖАННА ДМИТРИЕВНА

Южный математический институт — филиал ВНИЦ РАН,

старший научный сотрудник отдела математического моделирования

РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,

доцент кафедры математического анализа

РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46

E-mail: jannatuaeva@inbox.ru

*Vladikavkaz Mathematical Journal  
2019, Volume 21, Issue 2, P. 58–66*

## THE PROBLEM OF DETERMINING THE MATRIX KERNEL OF THE ANISOTROPIC VISCOELASTICITY EQUATIONS SYSTEM

Totieva, Zh. D.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Southern Mathematical Institute VSC RAS,  
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia;

<sup>2</sup> North Ossetian State University,  
44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia  
E-mail: jannatuaeva@inbox.ru

**Abstract.** We consider the problem of determining the matrix kernel  $K(t) = \text{diag}(K_1, K_2, K_3)(t)$ ,  $t > 0$ , occurring in the system of integro-differential viscoelasticity equations for anisotropic medium. The direct initial boundary value problem is to determine the displacement vector function  $u(x, t) = (u_1, u_2, u_3)(x, t)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ ,  $x_3 > 0$ . It is assumed that the coefficients of the system (density and elastic modulus) depend only on the spatial variable  $x_3 > 0$ . The source of perturbation of elastic waves is concentrated on the boundary of  $x_3 = 0$  and represents the Dirac Delta function (Neumann boundary condition of a special kind). The inverse problem is reduced to the previously studied problems of determining scalar kernels  $K_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . As an additional condition, the value of the Fourier transform in  $x_2$  of the function  $u(x, t)$  is given on the surface  $x_3 = 0$ . Theorems of global unique solvability and stability of the solution of the inverse problem are given. The idea of proving global solvability is to apply the contraction mapping principle to a system of nonlinear Volterra integral equations of the second kind in a weighted Banach space.

**Key words:** inverse problem, stability, delta function, elastic moduli, coefficients, matrix kernel.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 35L20, 35R30, 35Q99.

**For citation:** Totieva, Zh. D. The Problem of Determining the Matrix Kernel of the Anisotropic Viscoelasticity Equations System, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 2, pp. 58–66 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32117.

## References

1. Kristensen, R. M. *Vvedenie v teoriyu vyazkouprugosti* [Introduction to the Theory of Viscoelasticity], Moscow, Mir, 1974, 340 p. (in Russian).
2. Rabotnov, Yu. N. *Elementy nasledstvennoj mekhaniki tverdyh tel* [Elements of Hereditary Mechanics of Solids], Moscow, Nauka, 1977, 384 p. (in Russian).
3. Rabotnov, Yu. N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a Deformable Solid], Moscow, Nauka, 1988, 712 p. (in Russian).
4. Pipkin, A. C. *Lectures on Viscoelasticity Theory*, Berlin, Springer, 1986, 199 p.
5. Khohlov, A. V. The Qualitative Analysis of Theoretic Curves Generated by Linear Viscoelasticity Constitutive Equation, *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N. E. Baumana* [Science and Education], 2016, no. 5, pp. 187–245.
6. Durdiev, D. K. and Totieva, Zh. D. The Problem of Determining the One-Dimensional Kernel of the Viscoelasticity Equation, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2013, vol. 16, no. 2, pp. 72–82 (in Russian).
7. Durdiev, D. Q., Totieva, Zh. D. The Problem of Determining the Multidimensional Kernel of Viscoelasticity Equation, *Vladikavkaz Math. J.*, vol. 17, no. 4, pp. 18–43. (in Russian). DOI 10.23671/VNC.2015.4.5969.
8. Durdiev, D. K. and Totieva, Zh. D. The Problem of Determining the One-Dimensional Kernel of the Electroviscoelasticity Equation, *Siberian Mathematical J.*, 2017, vol. 58, no. 3, pp. 427–444. DOI: 10.1134/S0037446617030077.
9. Durdiev, D. K. and Totieva, Zh. D. The Problem of Finding the One-Dimensional Kernel of the Thermoviscoelasticity Equation, *Mathematical Notes*, 2018, vol. 103, no. 1–2, pp. 118–132. DOI: 10.1134/S0001434618010145.
10. Safarov, Zh. Sh. and Durdiev, D. K. Inverse Problem for Integro-Differential Equation of Acoustics, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 2018, vol. 54, no. 1, pp. 136–147 (in Russian).
11. Durdiev, D. K. and Rahmonov, A. A. Inverse Problem for A System of Integro-Differential Equations for SH Waves in a Visco-Elastic Porous Medium: Global Solvability, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2018, vol. 195, no. 3, pp. 923–937. DOI: 10.1134/S0040577918060090.
12. Durdiev, D. K. and Durdiev, U. D. The Problem of Kernel Determination from Viscoelasticity System Integro-Differential Equations for Homogeneous Anisotropic Media, *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2016, vol. 7, no. 3, pp. 405–409.
13. Durdiev, D. K. and Totieva, Zh. D. The Problem of Determining the One-Dimensional Matrix Kernel of the System of Viscoelasticity Equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2018, vol. 17, no. 17, pp. 8019–8032. DOI: 10.1002/mma.5267.
14. Tuaeava, Zh. D. Multidimensional Mathematical Model of Seismic Memory, *Issledovaniya po differentsial'nym uravneniyam i matematicheskomu modelirovaniyu* [Research on Differential Equations and Mathematical Modeling], Vladikavkaz, VNC RAN, 2008, pp. 297–306 (in Russian).

*Received June 14, 2018*

ZHANNA D. TOTIEVA  
 Southern Mathematical Institute VSC RAS,  
 22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia,  
 Senior Researcher of the Department of Math. Modeling;  
 North Ossetian State University,  
 44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,  
 Associate Professor of the Department of Math. Analysis  
 E-mail: jannatuaeava@inbox.ru

УДК 517. 968

DOI 10.23671/VNC.2019.2.32118

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА В НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ  
ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БУССИНЕСКА  
С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Т. К. Юлдашев<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Сибирский государственный аэрокосмический университет  
имени академика М. Ф. Решетнева,  
Россия, 660014, Красноярск, пр. им. газеты Красноярский рабочий, 31  
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

**Аннотация.** Рассматривается в трехмерной области линейное интегро-дифференциальное уравнение типа Буссинеска четвертого порядка с коэффициентом восстановления и вырожденным ядром. Решение этого интегро-дифференциального уравнения рассматривается в классе непрерывно-дифференцируемых функций. Сначала изучаются вопросы классической разрешимости нелокальной прямой краевой задачи для рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения Буссинеска с параметром при интегральном члене. Используются метод разделения переменных и метод вырожденного ядра. Получается счетная система алгебраических уравнений. Решение этой алгебраической системы уравнений для регулярных значений спектрального параметра при интегральном члене заданного уравнения позволяет построить решение нелокальной прямой краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в виде ряда Фурье. Устанавливается критерий однозначной разрешимости прямой краевой задачи при фиксированных значениях функции восстановления. С помощью неравенства Коши — Буняковского и неравенство Бесселя доказывается абсолютная и равномерная сходимость полученного ряда Фурье. Для решения прямой краевой задачи также доказывается непрерывность всех производных, входящих в заданное уравнение. Далее, с помощью дополнительного интегрального условия однозначно определяется функция восстановления в виде ряда Фурье. Устанавливается критерий непрерывности производных второго порядка от функции восстановления по пространственным переменным. Исходя из найденных значений функции восстановления однозначно определяется и основная искомая функция как решение обратной задачи для рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения. Кроме того, изучается устойчивость решения интегро-дифференциального уравнения по функции восстановления.

**Ключевые слова:** интегро-дифференциальное уравнение типа Буссинеска, уравнение четвертого порядка, вырожденное ядро, интегральное условие, однозначная разрешимость.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 35A02, 35M10, 35S05.

**Образец цитирования:** Юлдашев Т. К. Определение коэффициента в нелокальной задаче для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 2.—С. 67–84. DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32118.

## 1. Постановка задачи

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению смешанных, краевых и обратных задач для уравнений в частных производных. Теория смешанных и краевых задач, в силу ее прикладной важности, в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений.

Исследования многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек описываются дифференциальными уравнениями в частных производных высоких порядков. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес и дифференциальные уравнения четвертого порядка (см., например, [1–4]).

В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, дополнительной информацией, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме [5, 6].

Метод разделения переменных при исследовании дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных применяется в работах многих авторов, в частности в [7–9].

Теория обратных задач представляет собой активно развивающееся направление современной теории дифференциальных уравнений. К обратным задачам относят задачи определения физических свойств объектов, например: плотность, коэффициент теплопроводности, упругие модули в зависимости от координат или в виде функций других параметров. Заметим, что без умения решать прямые задачи невозможно исследовать обратные. Линейные обратные задачи рассматривались во многих работах, в частности в [10–16]. В настоящее время совершенствуется и методика решения обратных задач.

В настоящей работе изучается однозначная разрешимость нелокальной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска четвертого порядка с вырожденным ядром. Итак, в области  $\Omega = \{(t, x, y) : 0 < t < T, 0 < x, y < l\}$  рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида

$$U_{tt}(t, x, y) - (U_{ttxx}(t, x, y) + U_{ttyy}(t, x, y)) - (U_{xx}(t, x, y) + U_{yy}(t, x, y)) + \nu \int_0^T K(t, s)(U_{xx}(s, x, y) + U_{yy}(s, x, y)) ds = \alpha(t)\beta(x, y), \quad (3.1)$$

где  $T$  и  $l$  — заданные положительные действительные числа,  $\nu$  — действительный спектральный параметр,

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^k a_i(t)b_i(s), \quad a_i(t), b_i(s) \in C^2[0; T], \quad a_i(t) \neq 0, \quad t \in [0; T];$$

$$\alpha(t) \in C^2[0; T], \quad \alpha(t) \neq 0, \quad t \in [0; T].$$

Здесь предполагается, что система функций  $\{a_i(t)\}$  и система функций  $\{b_i(s)\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , являются линейно независимыми.

Данное уравнение принадлежит псевдогиперболическому типу и называется также интегро-дифференциальным уравнением типа Буссинеска. В случае, когда  $\nu = 0$ , соответствующее дифференциальное уравнение Буссинеска описывает движения волн в стратифицированной жидкости. Гравитационные волны в жидкости со стратифицированной плотностью представляют большой интерес в метеорологии и океанографии [3, с. 404, 405].

**Задача.** Найти в области  $\Omega$  пару функций

$$U(t, x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega') \cap C^2(\Omega) \cap C_{t,x,y}^{2+2+0}(\Omega) \cap C_{t,x,y}^{2+0+2}(\Omega), \quad (3.2)$$

$$\beta(x, y) \in C^2\{0 < x, y < l\}, \quad (3.3)$$

удовлетворяющую уравнению (3.1) и следующим условиям:

$$U(0, x, y) = U(T, x, y), \quad 0 \leq x, y \leq l, \quad (3.4)$$

$$\int_0^T U(t, x, y) dt = \varphi(x, y), \quad 0 \leq x, y \leq l, \quad (3.5)$$

$$U(t, 0, y) = U(t, l, y) = U(t, x, 0) = U(t, x, l) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.6)$$

$$\int_0^T \Theta(t)U(t, x, y) dt = \psi(x, y), \quad 0 \leq x, y \leq l, \quad (3.7)$$

где  $C^r(\Omega)$  — класс функций  $U(t, x, y)$ , имеющих непрерывные производные  $\frac{\partial^r}{\partial t^r} U(t, x, y)$ ,  $\frac{\partial^r}{\partial x^r} U(t, x, y)$ ,  $\frac{\partial^r}{\partial y^r} U(t, x, y)$  в области  $\Omega$ ;  $C_{t,x,y}^{r+s+0}(\Omega)$  — класс функций  $U(t, x, y)$ , имеющих непрерывную производную  $\frac{\partial^{r+s}}{\partial t^r \partial x^s} U(t, x, y)$  в области  $\Omega$ ;  $C_{t,x,y}^{r+0+s}(\Omega)$  — класс функций  $U(t, x, y)$ , имеющих непрерывную производную  $\frac{\partial^{r+s}}{\partial t^r \partial y^s} U(t, x, y)$  в области  $\Omega$ ;  $r$  и  $s$  — натуральные числа; функция  $\Theta(t) \in C[0, T]$  не обращается в нуль на отрезке  $[0, T]$ ;  $\varphi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$  — заданные достаточно гладкие функции;

$$\varphi(0, y) = \varphi(l, y) = \varphi(x, 0) = \varphi(x, l) = 0,$$

$$\Omega' = \Omega \cup \{x = 0\} \cup \{x = l\} \cup \{y = 0\} \cup \{y = l\},$$

$$\bar{\Omega} = \{(t, x, y) \mid 0 \leq t \leq T, 0 \leq x, y \leq l\}.$$

## 2. Формальное решение прямой краевой задачи (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6)

Нетривиальное решение уравнения (3.1) в области  $\Omega$  разыскивается в виде следующего ряда Фурье:

$$U(t, x, y) = \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m}(t) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y, \quad (3.8)$$

где

$$u_{n,m}(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l U(t, x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

Предполагается, что и функция  $\beta(x, y)$  разлагается в ряд Фурье:

$$\beta(x, y) = \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \beta_{n,m} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y, \quad (3.10)$$

где

$$\beta_{n,m} = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \beta(x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Подставляя ряды (3.8) и (3.10) в уравнение (3.1), получаем

$$u_{n,m}''(t) + \lambda_{n,m}^2 u_{n,m}(t) = \nu \lambda_{n,m}^2 \int_0^T \sum_{i=1}^k a_i(t) b_i(s) u_{n,m}(s) ds + \alpha(t) \beta_{n,m}, \quad (3.12)$$

где

$$\lambda_{n,m}^2 = \frac{\mu_{n,m}^2}{1 + \mu_{n,m}^2}, \quad \mu_{n,m} = \frac{\pi}{l} \sqrt{n^2 + m^2}.$$

С помощью обозначения

$$\tau_{in,m} = \int_0^T b_i(s) u_{n,m}(s) ds \quad (3.13)$$

уравнения (3.12) перепишутся в следующем виде:

$$u_{n,m}''(t) + \lambda_{n,m}^2 u_{n,m}(t) = \nu \lambda_{n,m}^2 \sum_{i=1}^k a_i(t) \tau_{in,m} + \alpha(t) \beta_{n,m}. \quad (3.14)$$

Дифференциальные уравнения (3.14) решаются методом вариации произвольных постоянных:

$$u_{n,m}(t) = c_{n,m} \cos \lambda_{n,m} t + d_{n,m} \sin \lambda_{n,m} t + \eta_{n,m}(t), \quad (3.15)$$

где

$$\eta_{n,m}(t) = \nu \lambda_{n,m} \sum_{i=1}^k \tau_{in,m} \int_0^t \sin \lambda_{n,m}(t-s) a_i(s) ds + \frac{\beta_{n,m}}{\lambda_{n,m}} \int_0^t \sin \lambda_{n,m}(t-s) \alpha(s) ds.$$

Условие (3.4) с учетом формулы (3.9) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{n,m}(0) &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l U(0, x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dy dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l U(T, x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dy dx = u_{n,m}(T). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов  $c_{n,m}$  и  $d_{n,m}$  в (3.15) воспользуемся условием (3.16). Тогда получаем

$$u_{n,m}(t) = d_{n,m} \left[ \sin \lambda_{n,m} t + \frac{\sin \lambda_{n,m} T}{1 - \cos \lambda_{n,m} T} \cos \lambda_{n,m} t \right] + \xi_{n,m}(t), \quad (3.17)$$

где

$$\xi_{n,m}(t) = \frac{\eta_{n,m}(T)}{1 - \cos \lambda_{n,m} T} \cos \lambda_{n,m} t + \eta_{n,m}(t).$$

Теперь воспользуемся интегральным условием (3.5) и формулой (3.9):

$$\begin{aligned} \int_0^T u_{n,m}(t) dt &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \int_0^T U(t, x, y) dt \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dy dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \varphi(x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dy dx = \varphi_{n,m}. \end{aligned} \quad (3.18)$$



Тогда из (3.17) и (3.18) получаем

$$\begin{aligned}\varphi_{n,m} &= \int_0^T u_{n,m}(t) dt = d_{n,m} \int_0^T \left[ \sin \lambda_{n,m} t + \frac{\sin \lambda_{n,m} T}{1 - \cos \lambda_{n,m} T} \cos \lambda_{n,m} t \right] dt + \gamma_{n,m} \\ &= \frac{d_{n,m}}{\lambda_{n,m}} \left[ 1 - \cos \lambda_{n,m} T + \frac{\sin^2 \lambda_{n,m} T}{1 - \cos \lambda_{n,m} T} \right] + \gamma_{n,m},\end{aligned}\quad (3.19)$$

где

$$\gamma_{n,m} = \int_0^T \xi_{n,m}(t) dt.$$

Итак, для определения неизвестных коэффициентов  $d_{n,m}$  требуем выполнения следующего условия:

$$\sigma_{n,m}(T) = 1 - \cos \lambda_{n,m} T \neq 0. \quad (3.20)$$

Из (3.19) находим

$$d_{n,m} = \frac{\lambda_{n,m}}{2} (\varphi_{n,m} - \gamma_{n,m}). \quad (3.21)$$

Подставляя (3.21) в формулу (3.17), получаем

$$u_{n,m}(t) = \frac{\lambda_{n,m}}{2} (\varphi_{n,m} - \gamma_{n,m}) \delta_{0n,m}(t) + \xi_{n,m}(t)$$

или

$$u_{n,m}(t) = \varphi_{n,m} B_{n,m}(t) + \nu \sum_{i=1}^k \tau_{in,m} D_{in,m}(t) + \beta_{n,m} E_{n,m}(t), \quad (3.22)$$

где

$$B_{n,m}(t) = \frac{\lambda_{n,m}}{2} \delta_{0n,m}(t), \quad \delta_{0n,m}(t) = \sin \lambda_{n,m} t + \frac{\sin \lambda_{n,m} T}{\sigma_{n,m}(T)} \cos \lambda_{n,m} t,$$

$$D_{in,m}(t) = h_{in,m}(T) \delta_{2n,m}(t) + h_{in,m}(t) - \frac{\lambda_{n,m}}{2} \delta_{0n,m}(t) \int_0^T h_{in,m}(t) dt,$$

$$E_{n,m}(t) = \delta_{1n,m}(T) \delta_{2n,m}(t) + \delta_{1n,m}(t) - \frac{\lambda_{n,m}}{2} \delta_{0n,m}(t) \int_0^T \delta_{1n,m}(t) dt,$$

$$h_{in,m}(t) = \lambda_{n,m} \int_0^t \sin \lambda_{n,m}(t-s) a_i(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$\delta_{1n,m}(t) = \frac{1}{\lambda_{n,m}} \int_0^t \sin \lambda_{n,m}(t-s) \alpha(s) ds, \quad \lambda_{n,m} = \sqrt{\frac{\mu_{n,m}^2}{1 + \mu_{n,m}^2}}, \quad \mu_{n,m} = \frac{\pi}{l} \sqrt{n^2 + m^2},$$

$$\delta_{2n,m}(t) = \frac{1}{\sigma_{n,m}(T)} \left[ \cos \lambda_{n,m} t - \frac{\delta_{0n,m}(t)}{2} \sin \lambda_{n,m} T \right].$$

Подставляя (3.22) в (3.13), получаем счетную систему алгебраических уравнений (ССАУ):

$$\tau_{in,m} + \nu \sum_{j=1}^k \tau_{jn,m} H_{ijn,m} = \Psi_{in,m}, \quad (3.23)$$

где

$$H_{ijn,m} = - \int_0^T b_i(s) D_{jn,m}(s) ds, \quad (3.24)$$

$$\Psi_{in,m} = \int_0^T b_i(s) [\varphi_{n,m} B_{n,m}(s) + \beta_{n,m} E_{n,m}(s)] ds.$$

ССАУ (3.23) однозначно разрешима при любых конечных  $\Psi_{in,m}$ , если выполняется следующее условие:

$$\Delta_{n,m}(\nu) = \begin{vmatrix} 1 + \nu H_{11n,m} & \nu H_{12n,m} & \dots & \nu H_{1kn,m} \\ \nu H_{21n,m} & 1 + \nu H_{22n,m} & \dots & \nu H_{2kn,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu H_{k1n,m} & \nu H_{k2n,m} & \dots & 1 + \nu H_{kkn,m} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.25)$$

Определитель  $\Delta_{n,m}(\nu)$  в (3.25) есть многочлен относительно  $\nu$  степени не выше  $k$ . Уравнение  $\Delta_{n,m}(\nu) = 0$  имеет не более, чем  $k$  различных корней. Эти корни являются собственными числами ядра интегро-дифференциального уравнения (3.1). Для других значений  $\nu$  условие (3.25) выполняется. Для таких регулярных значений  $\nu$  система (3.23) имеет единственное решение при любой конечной ненулевой правой части. Поэтому при выполнении условия (3.25) имеется однозначная разрешимость поставленной нелокальной обратной задачи.

Решения ССАУ (3.23) записываются в виде

$$\tau_{in,m} = \frac{\Delta_{in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (3.26)$$

где

$$\Delta_{in,m}(\nu) = \begin{vmatrix} 1 + \nu H_{11n,m} & \dots & \nu H_{1(i-1)n,m} & \Psi_{1n,m} & \nu H_{1(i+1)n,m} & \dots & \nu H_{1kn,m} \\ \nu H_{21n,m} & \dots & \nu H_{2(i-1)n,m} & \Psi_{2n,m} & \nu H_{2(i+1)n,m} & \dots & \nu H_{2kn,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu H_{k1n,m} & \dots & \nu H_{k(i-1)n,m} & \Psi_{kn,m} & \nu H_{k(i+1)n,m} & \dots & 1 + \nu H_{kkn,m} \end{vmatrix}.$$

Среди элементов определителей  $\Delta_{in,m}(\nu)$  находятся  $\Psi_{in,m}$ . В свою очередь, в составе  $\Psi_{in,m}$  находятся неизвестные величины  $\beta_{n,m}$ . В самом деле, эти неизвестные величины находились в правой части ССАУ (3.23). Чтобы вывести их из знака определителя выражение в (3.24) запишем в следующем виде:

$$\Psi_{in,m} = \varphi_{n,m} \Psi_{1in,m} + \beta_{n,m} \Psi_{2in,m},$$

где

$$\Psi_{1in,m} = \int_0^T b_i(s) B_{n,m}(s) ds, \quad \Psi_{2in,m} = \int_0^T b_i(s) E_{n,m}(s) ds.$$

В этом случае, согласно свойствам определителей имеем

$$\Delta_{in,m}(\nu) = \varphi_{n,m} \Delta_{1in,m}(\nu) + \beta_{n,m} \Delta_{2in,m}(\nu),$$

где

$$\Delta_{jin,m}(\nu) = \begin{vmatrix} 1 + \nu H_{11n,m} & \cdots & \nu H_{1(i-1)n,m} & \Psi_{j1n,m} & \nu H_{1(i+1)n,m} & \cdots & \nu H_{1kn,m} \\ \nu H_{21n,m} & \cdots & \nu H_{2(i-1)n,m} & \Psi_{j2n,m} & \nu H_{2(i+1)n,m} & \cdots & \nu H_{2kn,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu H_{k1n,m} & \cdots & \nu H_{k(i-1)n,m} & \Psi_{jk n,m} & \nu H_{k(i+1)n,m} & \cdots & 1 + \nu H_{kk n,m} \end{vmatrix},$$

$$j = 1, 2.$$

Тогда формула (3.26) записывается в виде

$$\tau_{in,m} = \varphi_{n,m} \frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} + \beta_{n,m} \frac{\Delta_{2in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.27)$$

Подставляя (3.27) в (3.22), получаем

$$u_{n,m}(t) = \varphi_{n,m} F_{n,m}(t) + \beta_{n,m} M_{n,m}(t), \quad (3.28)$$

где

$$F_{n,m}(t) = B_{n,m}(t) + \nu \sum_{i=1}^k \frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} D_{in,m}(t),$$

$$M_{n,m}(t) = E_{n,m}(t) + \nu \sum_{i=1}^k \frac{\Delta_{2in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} D_{in,m}(t).$$

Теперь (3.28) подставляем в ряд Фурье (3.8):

$$U(t, x, y) = \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} [\varphi_{n,m} F_{n,m}(t) + \beta_{n,m} M_{n,m}(t)] \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y. \quad (3.29)$$

### 3. Обоснование разрешимости прямой краевой задачи (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6)

Предположим, что  $\beta(x, y)$  — заданная гладкая функция. Рассмотрим случай, когда нарушается условие (3.20). Пусть  $\sigma_{n,m}(T) = 1 - \cos \lambda_{n,m} T = 0$  при некоторых  $T$ . Это условие эквивалентно равенству

$$\cos \lambda_{n,m} T = 1, \quad (3.30)$$

где

$$\lambda_{n,m} = \sqrt{\frac{\mu_{n,m}^2}{1 + \mu_{n,m}^2}}, \quad \mu_{n,m} = \frac{\pi}{l} \sqrt{n^2 + m^2}.$$

Уравнение (3.30) имеет решения

$$T_k = \frac{2\pi k}{\lambda_{n,m}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где  $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел.

Другие значения  $0 < T$ , для которых условие (3.20) выполняется, называются регулярными. Для регулярных значений  $T$  имеет место формула (3.29). Поэтому при выполнении условия (3.20) решение прямой краевой задачи (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6) в области  $\Omega$  представляется в виде ряда (3.29).

Покажем, что при определенных условиях относительно функций  $\varphi(x, y)$  и  $\beta(x, y)$  ряд (3.29) сходится абсолютно и равномерно. Здесь при любых  $n, m$  и регулярных значениях  $T$  справедливы оценки

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |u_{n,m}(t)| \leq C_1 \left[ \sum_{n,m=1}^{\infty} |\varphi_{n,m}| + \sum_{n,m=1}^{\infty} |\beta_{n,m}| \right], \quad (3.31)$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |u''_{n,m}(t)| \leq C_1 \left[ \sum_{n,m=1}^{\infty} |\varphi_{n,m}| + \sum_{n,m=1}^{\infty} |\beta_{n,m}| \right], \quad (3.32)$$

где  $0 < C_1 = \text{const}$ .

Действительно, для регулярных значений  $T$  справедливы соотношения

$$0 < |\sigma_{n,m}(T)| = |1 - \cos \lambda_{n,m}T| \leq 2, \quad 0 < \lambda_{n,m} < 1 \text{ и } \lambda_{n,m} \rightarrow 1 \text{ при } n, m \rightarrow \infty.$$

Для гладких функций  $F_{n,m}(t)$  и  $M_{n,m}(t)$  из (3.28) выполняются следующие условия:

$$C_{11} = \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} |F_{n,m}(t)|; \max_{t \in [0, T]} |M_{n,m}(t)| \right\} < \infty,$$

$$C_{12} = \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} |F''_{n,m}(t)|; \max_{t \in [0, T]} |M''_{n,m}(t)| \right\} < \infty.$$

Поэтому из (3.28) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=1}^{\infty} |u_{n,m}(t)| &\leq \sum_{n,m=1}^{\infty} [|F_{n,m}(t)| |\varphi_{n,m}| + |M_{n,m}(t)| |\beta_{n,m}|] \\ &\leq \sum_{n,m=1}^{\infty} \max_{t \in [0, T]} |F_{n,m}(t)| |\varphi_{n,m}| + \sum_{n,m=1}^{\infty} \max_{t \in [0, T]} |M_{n,m}(t)| |\beta_{n,m}| \\ &\leq C_{11} \left[ \sum_{n,m=1}^{\infty} |\varphi_{n,m}| + \sum_{n,m=1}^{\infty} |\beta_{n,m}| \right]. \end{aligned}$$

Дифференцируя выражение (3.28) два раза, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=1}^{\infty} |u''_{n,m}(t)| &\leq \sum_{n,m=1}^{\infty} \max_{t \in [0, T]} |F''_{n,m}(t)| |\varphi_{n,m}| + \sum_{n,m=1}^{\infty} \max_{t \in [0, T]} |M''_{n,m}(t)| |\beta_{n,m}| \\ &\leq C_{12} \left[ \sum_{n,m=1}^{\infty} |\varphi_{n,m}| + \sum_{n,m=1}^{\infty} |\beta_{n,m}| \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следуют оценки (3.31) и (3.32), где  $C_1 = \max\{C_{11}; C_{12}\}$ .

УСЛОВИЕ А. Пусть функция  $\varphi(x, y) \in C^2([0; l] \times [0; l])$  на сегменте  $[0; l]$  имеет кусочно-непрерывные производные третьего порядка и

$$\varphi(0, y) = \varphi(l, y) = \varphi(x, 0) = \varphi(x, l) = 0,$$

$$\begin{aligned}\varphi_{xx}(0, y) = \varphi_{xx}(l, y) = \varphi_{xx}(x, 0) = \varphi_{xx}(x, l) = 0, \\ \varphi_{yy}(0, y) = \varphi_{yy}(l, y) = \varphi_{yy}(x, 0) = \varphi_{yy}(x, l) = 0.\end{aligned}$$

Тогда путем интегрирования по частям три раза по переменной  $x$  интеграла (3.18) получаем, что

$$\varphi_{n,m} = - \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{\varphi_{n,m}'''}{n^3}, \quad (3.33)$$

где

$$\varphi_{n,m}''' = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \varphi_{xxx}(x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y \, dx \, dy. \quad (3.34)$$

Аналогично путем интегрирования по частям три раза по переменной  $y$  интеграла (3.34) получаем

$$\varphi_{n,m}''' = - \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{\varphi_{n,m}^{VI}}{m^3}, \quad (3.35)$$

где

$$\varphi_{n,m}^{VI} = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \varphi_{xxxxyy}(x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y \, dx \, dy. \quad (3.36)$$

Из (3.33) и (3.35) получаем, что

$$\varphi_{n,m} = \left( \frac{l}{\pi} \right)^6 \frac{\varphi_{n,m}^{VI}}{n^3 m^3}. \quad (3.37)$$

С помощью неравенства Бесселя для двойного интеграла (3.36) получаем оценку

$$\begin{aligned}\sum_{n,m=1}^{\infty} [\varphi_{n,m}^{VI}]^2 &= \frac{4}{l^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[ \int_0^l \int_0^l \varphi_{xxxxyy}(x, y) \vartheta_{n,m}(x, y) \, dx \, dy \right]^2 \\ &\leq \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l [\varphi_{xxxxyy}(x, y)]^2 \, dx \, dy < \infty,\end{aligned} \quad (3.38)$$

где

$$\vartheta_{n,m}(x, y) = \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y.$$

УСЛОВИЕ Б. Пусть функция  $\beta(x, y) \in C^2([0; l] \times [0; l])$  на сегменте  $[0; l]$  имеет кусочно-непрерывные производные третьего порядка и

$$\begin{aligned}\beta(0, y) = \beta(l, y) = \beta(x, 0) = \beta(x, l) = 0, \\ \beta_{xx}(0, y) = \beta_{xx}(l, y) = \beta_{xx}(x, 0) = \beta_{xx}(x, l) = 0, \\ \beta_{yy}(0, y) = \beta_{yy}(l, y) = \beta_{yy}(x, 0) = \beta_{yy}(x, l) = 0.\end{aligned}$$

Тогда путем интегрирования по частям три раза по переменной  $x$  интеграла (3.11) получаем, что

$$\beta_{n,m} = - \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{\beta_{n,m}'''}{n^3}, \quad (3.39)$$

где

$$\beta_{n,m}''' = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \beta_{xxx}(x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy. \quad (3.40)$$

Аналогично трижды интегрируя по частям по переменной  $y$  интеграл (3.40), получаем

$$\beta_{n,m}''' = - \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{\beta_{n,m}^{VI}}{m^3}, \quad (3.41)$$

где

$$\beta_{n,m}^{VI} = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \beta_{xxxyyy}(x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy. \quad (3.42)$$

Из (3.39) и (3.41) получаем, что

$$\beta_{n,m} = \left( \frac{l}{\pi} \right)^6 \frac{\beta_{n,m}^{VI}}{n^3 m^3}. \quad (3.43)$$

С помощью неравенства Бесселя для двойного интеграла (3.42) получаем оценку

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=1}^{\infty} [\beta_{n,m}^{VI}]^2 &= \frac{4}{l^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[ \int_0^l \int_0^l \beta_{xxxyyy}(x, y) \vartheta_{n,m}(x, y) dx dy \right]^2 \\ &\leq \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l [\beta_{xxxyyy}(x, y)]^2 dx dy < \infty. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Учитывая формулы (3.31), (3.37), (3.38), (3.43) и (3.44) и применяя неравенство Гёльдера, для ряда (3.29) получаем

$$\begin{aligned} |U(t, x, y)| &\leq \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} |u_{n,m}(t)| \left| \sin \frac{\pi n}{l} x \right| \left| \sin \frac{\pi m}{l} y \right| \\ &\leq \frac{2C_1}{l} \left[ \sum_{n,m=1}^{\infty} |\varphi_{n,m}| + \sum_{n,m=1}^{\infty} |\beta_{n,m}| \right] = \gamma_1 \left[ \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 m^3} |\varphi_{n,m}^{VI}| + \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 m^3} |\beta_{n,m}^{VI}| \right] \\ &\leq \gamma_1 \left[ \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^6 m^6}} \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} |\varphi_{n,m}^{VI}|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^6 m^6}} \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} |\beta_{n,m}^{VI}|^2} \right] \\ &\leq \frac{2\gamma_1}{l} \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^6 m^6}} \left[ \sqrt{\int_0^l \int_0^l [\varphi_{xxxyyy}(x, y)]^2 dx dy} + \sqrt{\int_0^l \int_0^l [\beta_{xxxyyy}(x, y)]^2 dx dy} \right] < \infty, \end{aligned} \quad (3.45)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{2C_1}{l} \left( \frac{l}{\pi} \right)^6.$$

Из (3.45) следует, что ряд (3.29) абсолютно и равномерно сходится в области  $\bar{\Omega}$ .

Для функции (3.29) покажем непрерывность всех производных, входящих в уравнение (3.1). Функцию (3.29) формально продифференцируем нужное число раз:

$$U_{tt}(t, x, y) = \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} [\varphi_{n,m} F''_{n,m}(t) + \beta_{n,m} M''_{n,m}(t)] \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y, \quad (3.46)$$

$$U_{xx}(t, x, y) = -\frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} [\varphi_{n,m} F_{n,m}(t) + \beta_{n,m} M_{n,m}(t)] \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y, \quad (3.47)$$

$$U_{yy}(t, x, y) = -\frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} [\varphi_{n,m} F_{n,m}(t) + \beta_{n,m} M_{n,m}(t)] \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y, \quad (3.48)$$

$$U_{ttx}(t, x, y) = -\frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} [\varphi_{n,m} F''_{n,m}(t) + \beta_{n,m} M''_{n,m}(t)] \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y, \quad (3.49)$$

$$U_{ttyy}(t, x, y) = -\frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} [\varphi_{n,m} F''_{n,m}(t) + \beta_{n,m} M''_{n,m}(t)] \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y. \quad (3.50)$$

С учетом оценок (3.32), (3.37), (3.38), (3.43), (3.44) и неравенства Гёльдера, для ряда (3.46) аналогично (3.45) получаем

$$\begin{aligned} |U_{tt}(t, x, y)| &\leq \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} |u''_{n,m}(t)| \left| \sin \frac{\pi n}{l} x \right| \left| \sin \frac{\pi m}{l} y \right| \\ &\leq \frac{2C_1}{l} \left[ \sum_{n,m=1}^{\infty} |\varphi_{n,m}| + \sum_{n,m=1}^{\infty} |\beta_{n,m}| \right] = \gamma_1 \left[ \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 m^3} |\varphi_{n,m}^{VI}| + \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 m^3} |\beta_{n,m}^{VI}| \right] \\ &\leq \frac{2\gamma_1}{l} \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^6 m^6}} \left[ \sqrt{\int_0^l \int_0^l [\varphi_{xxxxyy}(x, y)]^2 dx dy} + \sqrt{\int_0^l \int_0^l [\beta_{xxxxyy}(x, y)]^2 dx dy} \right] < \infty. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Аналогично для рядов (3.47) и (3.48) получаем

$$\begin{aligned} |U_{xx}(t, x, y)| &\leq \frac{2\pi^2}{l^3} \sum_{n,m=1}^{\infty} n^2 |u_{n,m}(t)| \left| \sin \frac{\pi n}{l} x \right| \left| \sin \frac{\pi m}{l} y \right| \\ &\leq \gamma_2 \left[ \sum_{n,m=1}^{\infty} n^2 |\varphi_{n,m}| + \sum_{n,m=1}^{\infty} n^2 |\beta_{n,m}| \right] = \gamma_2 \left[ \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{nm^3} |\varphi_{n,m}^{VI}| + \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{nm^3} |\beta_{n,m}^{VI}| \right] \\ &\leq \frac{2\gamma_2}{l} \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m^6}} \left[ \sqrt{\int_0^l \int_0^l [\varphi_{xxxxyy}(x, y)]^2 dx dy} + \sqrt{\int_0^l \int_0^l [\beta_{xxxxyy}(x, y)]^2 dx dy} \right] < \infty, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned}
|U_{yy}(t, x, y)| &\leq \frac{2\pi^2}{l^3} \sum_{n,m=1}^{\infty} m^2 |u_{n,m}(t)| \left| \sin \frac{\pi n}{l} x \right| \left| \sin \frac{\pi m}{l} y \right| \\
&\leq \gamma_2 \left[ \sum_{n,m=1}^{\infty} m^2 |\varphi_{n,m}| + \sum_{n,m=1}^{\infty} m^2 |\beta_{n,m}| \right] = \gamma_2 \left[ \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 m} |\varphi_{n,m}^{VI}| + \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 m} |\beta_{n,m}^{VI}| \right] \\
&\leq \frac{2\gamma_2}{l} \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^6 m^2}} \left[ \sqrt{\int_0^l \int_0^l [\varphi_{xxxxyy}(x, y)]^2 dx dy} + \sqrt{\int_0^l \int_0^l [\beta_{xxxxyy}(x, y)]^2 dx dy} \right] < \infty,
\end{aligned} \tag{3.53}$$

где

$$\gamma_2 = \frac{2C_1 l^3}{\pi^4}.$$

Точно также и для рядов (3.49) и (3.50) аналогично (3.51)–(3.53) легко показать, что

$$|U_{ttx}(t, x, y)| < \infty, \quad |U_{tty}(t, x, y)| < \infty.$$

Таким образом, в области  $\Omega$  функция  $U(t, x, y)$ , определяемая рядом (3.29), удовлетворяет условиям (3.2) прямой задачи (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6). Следовательно, каждое нетривиальное решение прямой задачи (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6), удовлетворяющее условиям задачи (3.2), представляется в виде ряда Фурье (3.29) (см. [17, гл. 6]).

Для установления единственности решения покажем, что при однородном интегральном условии

$$\int_0^T U(t, x, y) dt = 0, \quad 0 \leq x, y \leq l,$$

и нулевой правой части прямая краевая задача (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6) имеет только тривиальное решение. С этой целью предположим, что  $\varphi(x, y) \equiv 0$ ,  $\beta(x, y) \equiv 0$ . Тогда  $\varphi_{n,m} \equiv 0$ ,  $\beta_{n,m} \equiv 0$  и из формул (3.8) и (3.28) следует, что

$$\int_0^l \int_0^l U(t, x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = 0, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

Отсюда, в силу полноты систем собственных функций  $\left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x \right\}$ ,  $\left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi m}{l} y \right\}$  в  $L_2[0, l]$ , заключаем, что  $U(t, x, y) \equiv 0$  для всех  $x, y \in [0, l]$  и  $t \in [0, T]$ .

Следовательно, если выполняются условия (3.20) и (3.25), то для прямой задачи (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6) существует решение и это решение единственно в области  $\Omega$ .



#### 4. Обратная задача (3.1)–(3.7)

Определим коэффициент восстановления  $\beta(x, y)$ . С этой целью воспользуемся условием (3.7). Тогда из (3.28) получаем

$$\begin{aligned} \psi_{n,m} &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \psi(x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y \, dx \, dy \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \int_0^T \Theta(t) U(t, x, y) \, dt \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y \, dx \, dy \\ &= \int_0^T \Theta(t) u_{n,m}(t) \, dt = \varphi_{n,m} \chi_{1n,m} + \beta_{n,m} \chi_{2n,m}, \end{aligned}$$

где

$$\chi_{1n,m} = \int_0^T \Theta(t) F_{n,m}(t) \, dt, \quad \chi_{2n,m} = \int_0^T \Theta(t) M_{n,m}(t) \, dt.$$

Отсюда определяем, что

$$\beta_{n,m} = \frac{\psi_{n,m} - \varphi_{n,m} \chi_{1n,m}}{\chi_{2n,m}}. \quad (3.54)$$

Покажем, что в (3.54)  $\chi_{2n,m} \neq 0$ . С этой целью предположим

$$\chi_{2n,m} = \int_0^T \Theta(t) M_{n,m}(t) \, dt = 0. \quad (3.55)$$

Применяем теорему о среднем (см. [18, с. 419, теорема 3]). По условию постановки задачи  $\Theta(t) \neq 0$ ,  $t \in [0, T]$ . Тогда из (3.55) получаем, что

$$\int_0^T M_{n,m}(t) \, dt = 0.$$

Анализ функции  $M_{n,m}(t)$  показывает, что это возможно, если справедливо следующее равенство:

$$\int_0^T \sin \lambda_{n,m}(T-t) \alpha(t) \, dt = 0. \quad (3.56)$$

Применяем теорему о среднем (см. [18, с. 419, теорема 3]) к равенству (3.56). По условию постановки задачи  $\alpha(t) \neq 0$ ,  $t \in [0, T]$ . Тогда из (3.56) получаем, что

$$\int_0^T \sin \lambda_{n,m}(T-t) \, dt = 0.$$

Вычисляя этот интеграл, приходим к тригонометрическому уравнению  $\cos \lambda_{n,m} T = \frac{1}{\lambda_{n,m}}$ . Поскольку  $0 < \lambda_{n,m} < 1$ , то данное тригонометрическое уравнение не имеет решения. Отсюда заключаем, что наше допущение (3.55) не верно. Следовательно,  $\chi_{2n,m} \neq 0$ .

В силу достаточной гладкости функций  $\psi(x, y)$  и  $\varphi(x, y)$ , покажем, что следующий ряд сходится абсолютно и равномерно:

$$\beta(x, y) = \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\psi_{n,m} - \varphi_{n,m} \chi_{1n,m}}{\chi_{2n,m}} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y. \quad (3.57)$$

УСЛОВИЕ В. Пусть функция  $\psi(x, y) \in C^2([0; l] \times [0; l])$  на сегменте  $[0; l]$  имеет кусочно-непрерывные производные третьего порядка и

$$\begin{aligned} \psi(0, y) &= \psi(l, y) = \psi(x, 0) = \psi(x, l) = 0, \\ \psi_{xx}(0, y) &= \psi_{xx}(l, y) = \psi_{xx}(x, 0) = \psi_{xx}(x, l) = 0, \\ \psi_{yy}(0, y) &= \psi_{yy}(l, y) = \psi_{yy}(x, 0) = \psi_{yy}(x, l) = 0. \end{aligned}$$

Тогда трижды интегрируя по частям по переменной  $x$  интеграл

$$\psi_{n,m} = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \psi(x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy$$

получаем, что

$$\psi_{n,m} = - \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{\psi_{n,m}'''}{n^3}, \quad (3.58)$$

где

$$\psi_{n,m}''' = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \psi_{xxx}(x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy. \quad (3.59)$$

Аналогично трижды интегрируя по частям по переменной  $y$  интеграл (3.59), получаем

$$\psi_{n,m}''' = - \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{\psi_{n,m}^{VI}}{m^3}, \quad (3.60)$$

где

$$\psi_{n,m}^{VI} = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \psi_{xxxxyy}(x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy. \quad (3.61)$$

Из (3.58) и (3.60) получаем, что

$$\psi_{n,m} = \left( \frac{l}{\pi} \right)^6 \frac{\psi_{n,m}^{VI}}{n^3 m^3}. \quad (3.62)$$

С помощью неравенства Бесселя для двойного интеграла (3.61) получаем оценку

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \left[ \psi_{n,m}^{VI} \right]^2 \leq \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l \left[ \psi_{xxxxyy}(x, y) \right]^2 dx dy < \infty. \quad (3.63)$$

Учитывая формулы (3.31), (3.37), (3.38), (3.62) и (3.63) и применяя неравенство Гёльдера, для ряда (3.57) получим

$$\begin{aligned}
 |\beta(x, y)| &\leq \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} (|\psi_{n,m}| + |\varphi_{n,m}| |\chi_{1n,m}|) |\chi_{2n,m}|^{-1} \left| \sin \frac{\pi n}{l} x \right| \left| \sin \frac{\pi m}{l} y \right| \\
 &\leq \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left( |\psi_{n,m}| + C_{1,1} |\varphi_{n,m}| \int_0^T |\Theta(t)| dt \right) \left( C_{1,1} \int_0^T |\Theta(t)| dt \right)^{-1} \\
 &\leq \frac{2}{C_{2,1} l} \sum_{n,m=1}^{\infty} (|\psi_{n,m}| + C_{2,1} |\varphi_{n,m}|) \\
 &\leq \frac{2}{C_{2,1} l} \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \left[ \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 m^3} |\psi_{n,m}^{VI}| + C_{2,1} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 m^3} |\varphi_{n,m}^{VI}| \right] \\
 &\leq \frac{2l^2}{C_{2,1} \pi^3} \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^6 m^6}} \left[ \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} [\psi_{n,m}^{VI}]^2} + C_{2,1} \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} [\varphi_{n,m}^{VI}]^2} \right] \\
 &\leq \gamma_3 \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^6 m^6}} \left[ \sqrt{\int_0^l \int_0^l [\psi_{xxxxyy}(x, y)]^2 dx dy} + C_{2,1} \sqrt{\int_0^l \int_0^l [\varphi_{xxxxyy}(x, y)]^2 dx dy} \right] < \infty,
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

где

$$\gamma_3 = \frac{2l^5}{C_{2,1} \pi^6}, \quad C_{2,1} \geq C_{1,1} \int_0^T |\Theta(t)| dt.$$

Из оценки (3.64) следует, что ряд (3.57) сходится абсолютно и равномерно в области  $\{0 < x, y < l\}$ .

Аналогично доказывается сходимость следующих рядов:

$$\begin{aligned}
 \beta_{xx}(x, y) &= -\frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\psi_{n,m} - \varphi_{n,m} \chi_{1n,m}}{\chi_{2n,m}} \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y, \\
 \beta_{yy}(x, y) &= -\frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\psi_{n,m} - \varphi_{n,m} \chi_{1n,m}}{\chi_{2n,m}} \left( \frac{\pi m}{l} \right)^2 \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y.
 \end{aligned}$$

Подставляя (3.54) в (3.29), окончательно определим основную неизвестную функцию  $U(t, x, y)$ :

$$U(t, x, y) = \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[ \varphi_{n,m} \left( F_{n,m}(t) - M_{n,m}(t) \frac{\chi_{1n,m}}{\chi_{2n,m}} \right) + \psi_{n,m} \frac{M_{n,m}(t)}{\chi_{2n,m}} \right] \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y. \tag{3.65}$$

Для ряда (3.65) нетрудно доказать справедливость оценок, которые выше доказаны для случая ряда (3.29). При этом ряды, полученные путем почленного дифференцирования ряда (3.65) по всем переменным, будут сходиться абсолютно и равномерно.

Теперь покажем, что решение интегро-дифференциального уравнения (3.1)  $U(t, x, y)$  устойчиво по функции восстановления  $\beta(x, y)$ . Пусть  $U_1(t, x, y)$  и  $U_2(t, x, y)$  — два различных решения краевой задачи (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6), соответствующие двум различным значениям функции восстановления  $\beta_1(x, y)$  и  $\beta_2(x, y)$ , соответственно.

Положим, что

$$|\beta_{1n,m} - \beta_{2n,m}| < \delta_{n,m},$$

где  $\delta_{n,m}$  — достаточно малые величины, что ряд  $\sum_{n,m=1}^{\infty} \delta_{n,m}$  сходится.

Тогда с учетом этого, в силу условий теоремы, из (3.29) имеем

$$|U_1(t, x, y) - U_2(t, x, y)| \leq \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \max_{t \in [0; T]} |M_{n,m}(t)| |\beta_{1n,m} - \beta_{2n,m}| < \frac{2C_{11}}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \delta_{n,m},$$

где  $C_{11} \geq \max_{t \in [0; T]} |M_{n,m}(t)|$ .

Отсюда окончательно получаем утверждения об устойчивости решения интегродифференциального уравнения (3.1) по функции восстановления, если положим

$$\varepsilon = \frac{2C_{11}}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \delta_{n,m}.$$

Таким образом нами доказана следующая теорема.

**Теорема.** Пусть выполняются условия А и Б. Тогда прямая задача (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6) однозначно разрешима в области  $\Omega$  при регулярных значениях  $\nu$  и  $T$ , для которых выполняются условия (3.20) и (3.25). Это решение  $U(t, x, y)$  определяется рядом (3.29). Кроме того, возможно почленное дифференцирование ряда (3.29) по всем переменным и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Пусть выполняются условия А, Б и В. Тогда функции  $U(t, x, y)$  и  $\beta(x, y)$ , которые являются решением обратной задачи (1)–(7), однозначно определяются из формул (3.57) и (3.65). При этом решение  $U(t, x, y)$  интегродифференциального уравнения (3.1) устойчиво по функции восстановления  $\beta(x, y)$ .

## Литература

1. Ахтямов А. М., Аюпова А. Р. О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне // Журн. Средневож. мат. о-ва.—2010.—Т. 12, № 3.—С. 37–42.
2. Турбин М. В. Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель — Балкли // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика.—2013.—№ 2.—С. 246–257.
3. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.—М.: Мир, 1977.—624 с.
4. Venney D. J., Luke J. C. Interactions of permanent waves of finite amplitude // J. Math. Phys.—1964.—Vol. 43.—P. 309–313. DOI: 10.1002/sapm1964431309.
5. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Мат. моделирование.—2000.—Т. 12, № 1.—С. 94–103.
6. Пулькина Л. С. Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями I рода с ядрами, зависящими от времени // Изв. вузов. Математика.—2012.—№ 10.—С. 32–44.
7. Ильин В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи мат. наук.—1960.—Т. 15, № 2 (92).—С. 97–154.
8. Лажетич Н. О существовании классического решения смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // Диф. уравнения.—1998.—Т. 34, № 5.—С. 682–694.
9. Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных.—М.: МГУ, 1991.—112 с.
10. Кононенко Л. И. Прямая и обратная задачи для сингулярной системы с медленными и быстрыми переменными в химической кинетике // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 1.—С. 39–46. DOI: 10.23671/VNC.2015.1.7291.
11. Костин А. Б. Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения // Мат. сб.—2013.—Т. 204, № 10.—С. 3–46. DOI: 10.4213/sm8104.

12. Прилепко А. И., Ткаченко Д. С. Свойства решений параболического уравнения и единственность решения обратной задачи об источнике с интегральным переопределением // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2003.—Т. 43, № 4.—С. 562–570.
13. Юлдашев Т. К. Об обратной задаче для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика.—2012.—№ 2 (18).—С. 56–62.
14. Юлдашев Т. К. Обратная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокого порядка // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2012.—№ 3 (28).—С. 17–29. DOI: 10.14498/vsgtu1041.
15. Юлдашев Т. К. Обратная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер.—2013.—№ 9/1 (110).—С. 58–66.
16. Юлдашев Т. К. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма третьего порядка с вырожденным ядром // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, № 2.—С. 76–85. DOI: 10.23671/VNC.2016.2.5921.
17. Положий Г. Н. Уравнения математической физики.—М.: Высшая школа, 1964.—560 с.
18. Никольский С. М. Курс математического анализа. Том 1.—М.: Наука, 1990.—528 с.

*Статья поступила 17 ноября 2016 г.*

ЮЛДАШЕВ ТУРСУН КАМАЛДИНОВИЧ  
Сибирский государственный аэрокосмический  
университет имени академика М. Ф. Решетнева,  
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики  
РОССИЯ, 660014, Красноярск, пр. им. газеты Красноярский рабочий, 31  
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

*Vladikavkaz Mathematical Journal  
2019, Volume 21, Issue 2, P. 67–84*

A COEFFICIENT DETERMINATION IN NONLOCAL PROBLEM  
FOR BOUSSINESQ TYPE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION  
WITH DEGENERATE KERNEL

Yuldashev, T. K.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Siberian State Aerospace University,  
31 Krasnoyarskiy Rabochiy Ave., Krasnoyarsk 660014, Russia  
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

**Abstract.** In the three-dimensional domain a Boussinesq type linear integro-differential equation of the fourth order with a restore coefficient and a degenerate kernel is considered. The solution of this integro-differential equation is considered in the class of continuously differentiable functions. First, we study the classical solvability of a nonlocal direct boundary value problem for the considered Boussinesq integro-differential equation with a parameter in the integral term. The method of separation of variables and the method of a degenerate kernels are used. A countable system of algebraic equations is obtained. The solution of this algebraic system of equations for regular values of the spectral parameter in the integral term of a given equation allows us to construct a solution of a non-local direct boundary value problem for an integro-differential equation in the form of a Fourier series. A criterion for the unique solvability of a direct boundary value problem is established for fixed values of the restore function. Using the Cauchy–Bunyakovsky inequality and the Bessel inequality, we prove the absolute and uniform convergence of the obtained Fourier series. The continuity of all the derivatives of the solution of the direct boundary value problem for a given equation is also proved. Further, with the help of an additional integral condition, the restore function is uniquely determined in the form of a Fourier series. The criterion of continuity of second order derivatives of the restore function with respect to space variables is established. Based on the found values of the restore function, the main unknown function is uniquely determined as a solution to the inverse problem for the considering integro-differential equation. In addition, the stability with respect to restore function of the solution of an integro-differential equation is studied.

**Key words:** Boussinesq type integro-differential equation, fourth-order equation, degenerate kernel, integral conditions, one valued solvability.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 35A02, 35M10, 35S05.

**For citation:** Yuldashev, T. K. A Coefficient Determination in Nonlocal Problem for Boussinesq Type Integro-Differential Equation with Degenerate Kernel, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 2, pp. 67–84 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32118.

## References

1. Akhtyamov, A. M. and Ayupova, A. R. On Solving the Problem of Diagnosing Defects in a Small Cavity in the Rod, *Middle Volga Mathematical Society Journal*, 2010, vol. 12, no. 3, pp. 37–42 (in Russian).
2. Turbin, M. V. Investigation of Initial-Boundary Value Problem for the Herschel-Bulkley Mathematical Fluid Model, *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 246–257 (in Russian).
3. Whitham, G. B. *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, 1974.
4. Benney, D. J. and Luke, J. C. Interactions of Permanent Waves of Finite Amplitude, *J. Math. Phys.*, 1964, vol. 43, pp. 309–313. DOI: 10.1002/sapm1964431309.
5. Gordeziani, D. G. and Avalishvili, G. A. On the Constructing of Solutions of the Nonlocal Initial Boundary Value Problems for One-Dimensional Medium Oscillation Equations, *Matematicheskoe Modelirovaniye*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94–103 (in Russian).
6. Pul'kina, L. S. A Nonlocal Problem for a Hyperbolic Equation with Integral Conditions of the 1st Kind with Time-Dependent Kernels, *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, no. 10, pp. 26–37. DOI: 10.3103/s1066369x12100039.
7. Il'in, V. A. The Solvability of Mixed Problems for Hyperbolic and Parabolic Equations, *Russian Mathematical Surveys*, 1960, vol. 15, no. 2, pp. 85–142. DOI: 10.1070/rm1960v015n02abeh004217.
8. Lazhetich, N. L. On the Existence of a Classical Solution of a Mixed Problem for a Second-Order One-Dimensional Hyperbolic Equation, *Differential Equations*, 1998, vol. 34, no. 5, pp. 683–695.
9. Chernyatin, V. A. *Obosnovaniye Metoda Fur'e v Smeshannom Zadache dlya Uravneniy v Chastnykh Proizvodnykh*, Moscow, Moscow State University, 1991, 112 p. (in Russian).
10. Kononenko, L. I. Direct and Inverse Problems for a Singular System with Slow and Fast Variables in Chemical Kinetics, *Vladikavkaz Math. J.*, 2015, vol. 17, no. 1, pp. 39–46 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2015.1.7291.
11. Kostin, A. B. The Inverse Problem of Recovering the Source in a Parabolic Equation Under a Condition of Nonlocal Observation, *Sbornik: Mathematics*, 2013, vol. 204, no. 10, pp. 1391–1434. DOI: 10.1070/SM2013v204n10ABEH004344.
12. Prilepko, A. I. and Tkachenko, D. S. Properties of Solutions of a Parabolic Equation and the Uniqueness of the Solution of the Inverse Source Problem with Integral Overdetermination, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43, no. 4, pp. 537–546.
13. Yuldashev, T. K. On the Inverse Problem for the quasilinear Partial Differential Equation of the First Order, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2012, no. 2 (18), pp. 56–62 (in Russian).
14. Yuldashev, T. K. Inverse Problem for Nonlinear Partial Differential Equation with High Order Pseudoparabolic Operator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, no. 3 (28), pp. 17–29 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1041.
15. Yuldashev, T. K. Inverse Problem for a Nonlinear Integral and Differential Equation of the Third Order, *Vestnik Samarskogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya*, 2013, no. 9/1 (110), pp. 58–66 (in Russian).
16. Yuldashev, T. K. Inverse Problem for a Third Order Fredholm Integro-Differential Equation with Degenerate Kernel, *Vladikavkaz Math. J.*, 2016, vol. 18, no. 2, pp. 76–85 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2016.2.5921.
17. Polozhiy, G. N. *Uravneniya Matematicheskoy Fiziki*, Moscow, Vysshaya Shkola, 1964, 560 p. (in Russian).
18. Nikol'skiy, S. M. *Kurs Matematicheskogo Analiza. Vol. 1*, Moscow, Nauka, 1990, 528 p. (in Russian).

Received November 17, 2016

TURSUN K. YULDASHEV  
Siberian State Aerospace University,  
31 Krasnoyarskiy Rabochiy Ave., Krasnoyarsk 660014, Russia,  
Associate Professor of Higher Mathematics Department  
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

# ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

## Общие положения

1. Периодическое издание «Владикавказский математический журнал» публикует оригинальные научные статьи отечественных и зарубежных авторов, содержащие новые математические результаты по функциональному и комплексному анализу, алгебре, геометрии, дифференциальным уравнениям и математической физике. По заказу редакционной коллегии журнал также публикует обзорные статьи. Журнал предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов. Периодичность — четыре выпуска в год. «Владикавказский математический журнал» публикует статьи на русском и английском языках, объемом, как правило, не более 2 усл.п.л. (17 страниц формата А4). Работы, превышающие 2 усл.п.л., принимаются к публикации по специальному решению Редколлегии журнала. Срок рассмотрения статей обычно не превышает 8 месяцев. При подготовке статей для ускорения их рассмотрения и публикации следует соблюдать правила для авторов.

2. К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Результаты иных авторов, использованные в статье, следует должным образом отразить в ссылках. Направляя статью в журнал, авторы тем самым подтверждают, что для нее выполнены указанные требования.

3. Направляя статью в журнал, каждый из авторов подтверждает, что статья соответствует наивысшим стандартам публикационной этики для авторов и соавторов, разработанным COPE (Committee on Publication Ethics), см. <http://publicationethics.org/about>.

4. Все материалы, поступившие для публикации в журнале, подлежат регистрации с указанием даты поступления рукописи в редакцию журнала. Решение о публикации, отказе в публикации или направлении рукописи автору для доработки должно быть принято главным редактором и сообщено автору не позднее 4 месяцев со дня поступления рукописи в редакцию журнала. Подробнее см. в разделе Рецензирование.

5. Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего окончательный макет статьи в формате PDF направляется автору на корректуру.

6. Условием публикации статей, принятых к печати, является подписание авторами договора о передаче авторских прав. Бланк договора можно скачать по ссылке.

7. Полнотекстовые версии статей, публикуемых в журнале, размещаются в Интернете в свободном доступе на официальном сайте журнала <http://www.vlmj.ru>, а также на сайтах Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU, Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка».

8. Публикации в журнале для авторов бесплатны.

## Подготовка и представление рукописи статьи

1. Все материалы предоставляются в редакцию в электронном виде. Рукопись должна быть тщательно выверена. Все страницы рукописи, включая рисунки, таблицы и список литературы, следует пронумеровать.

2. Работа должна быть подготовлена на компьютере в издательской системе LaTeX. Машинописные рукописи и рукописи, набранные на компьютере в системах, отличных от TeX, не рассматриваются. Файлы статьи \*.tex и \*.ps (\*.pdf) высылаются в адрес редакции по электронной почте [rio@smath.ru](mailto:rio@smath.ru).

3. В тексте статьи указывается индекс УДК, название работы, затем следуют инициалы и фамилии авторов, приводятся аннотации на русском и английском языках (объемом не менее 200 слов, достаточную для понимания содержания статьи), даются списки ключевых слов на русском и английском языках, а также коды согласно Mathematics Subjects Classifications (2010). Далее в файле приводятся полностью Фамилия, Имя, Отчество каждого автора, должность, полное название научного учреждения, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с кодом города или номер мобильного телефона, адрес электронной почты и ORCID.

4. Датой поступления статьи считается дата поступления электронной копии статьи на официальный e-mail журнала. Текст электронного сообщения должен быть оформлен как сопроводительное письмо, из текста которого ясно следует, что авторы направляют свою статью во Владикавказский математический журнал. Необходимо указать автора, ответственного за переписку с редакцией.

5. В аннотации не допускается использование громоздких формул, ссылок на текст работы или список литературы.

6. При подготовке файла статьи особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета LaTeX. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела.

7. Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков. Черно-белые рисунки должны быть подготовлены в формате EPS (Encapsulated PostScript) таким образом, чтобы обеспечить адекватное восприятие их при последующем оптическом уменьшении в два раза. При использовании рисунков необходимо подключить пакет epsfig. Подпись к рисунку должна быть центрирована под рисунком и состоять из слова «Рис. » с последующим номером. Номера рисунков должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к рисунку следует приводить в тексте статьи. Таблицы сопровождаются отформатированной слева надписью «Таблица» с последующим номером. Номера таблиц должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к таблице приводятся в тексте статьи. Графики выполняются в виде рисунков.

8. Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы, расположенные в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы печатается в конце текста статьи, оформленные в соответствии с правилами издания, на основании требований, предусмотренных действующими ГОСТами. В нем должны быть указаны: для статей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

9. Список литературы полностью дублируется на английском языке, приводится полностью отдельным блоком в конце статьи, повторяя список литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке есть ссылки на иностранные публикации, они полностью повторяются в списке, готовящемся в романском алфавите. Список References используется международными библиографическими базами (Scopus, WoS и др.) для учета цитирования авторов.

**Примечание:** более подробную информацию можно найти на официальном сайте журнала <http://www.vlmj.ru>.



# ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 21

Выпуск 2

Зав. редакцией В. В. Возрова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций.  
Свидетельство о регистрации ПИИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.

---

Подписано в печать 21.06.2019. Дата выхода в свет 28.06.2019.  
Формат бумаги 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Гарн. шрифта Computer modern.  
Усл. п. л. 10,00. Тираж 100 экз. Цена свободная.

---

**Учредитель:**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Федеральный научный центр «Владикавказский научный центр  
Российской академии наук» (ВНЦ РАН)

**Издатель:**

Южный математический институт — филиал ФГБУН ФНЦ  
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»

**Адрес издателя:**

362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.  
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

Индекс 57380