Главный редактор

А. Г. КУСРАЕВ
Южный математический институт ВНЦ РАН;
Северо-Осетинский госуниверситет им. К. Л. Хетагурова

Редакционная коллегия

А. В. АБАНИН
Южный федеральный университет;
Южный математический
институт ВНЦ РАН

Н. А. ВАВИЛОВ
Санкт-Петербургский госуниверситет

А. О. ВАТУЛЬЯН
Южный федеральный университет;
Южный математический
институт ВНЦ РАН

С. К. ВОДОПЬЯНОВ
Институт математики
Сибирского отделения РАН

Е. И. ГОРДОН
Иллинойсский университет,
Урбана, США

А. И. КОЖАНОВ
Институт математики
Сибирского отделения РАН

В. А. КОЙБАЕВ
Южный математический
институт ВНЦ РАН;
Северо-Осетинский госуниверситет
им. К. Л. Хетагурова

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК
Южный федеральный университет;
Южный математический
институт ВНЦ РАН

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ
Институт математики
Сибирского отделения РАН

В. Д. МАЗУРОВ
Институт математики
Сибирского отделения РАН

А. М. НАХУШЕВ
Институт прикладной математики
и автоматизации КБНЦ РАН

С. Г. САМКО
Южный федеральный университет;
Университет Алгарве, Португалия

В. Г. ТРОИЦКИЙ
Альбертский университет,
Эдмонтон, Канада

Ш. С. ХУБЕЖТЫ
Южный математический
институт ВНЦ РАН

А. Б. ШАБАТ
Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау РАН;
Карачаево-Черкесский государственный
университет им. У. Д. Алиева

И. И. ШАРАПУДИНОВ
Дагестанский государственный
педагогический университет;
Южный математический
институт ВНЦ РАН

Ответственный секретарь

Е. К. БАСАЕВА
Южный математический институт ВНЦ РАН;
Северо-Осетинский госуниверситет им. К. Л. Хетагурова

Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
Электронная версия: **www.vmj.ru**

© Южный математический институт
ВНЦ РАН, 2015

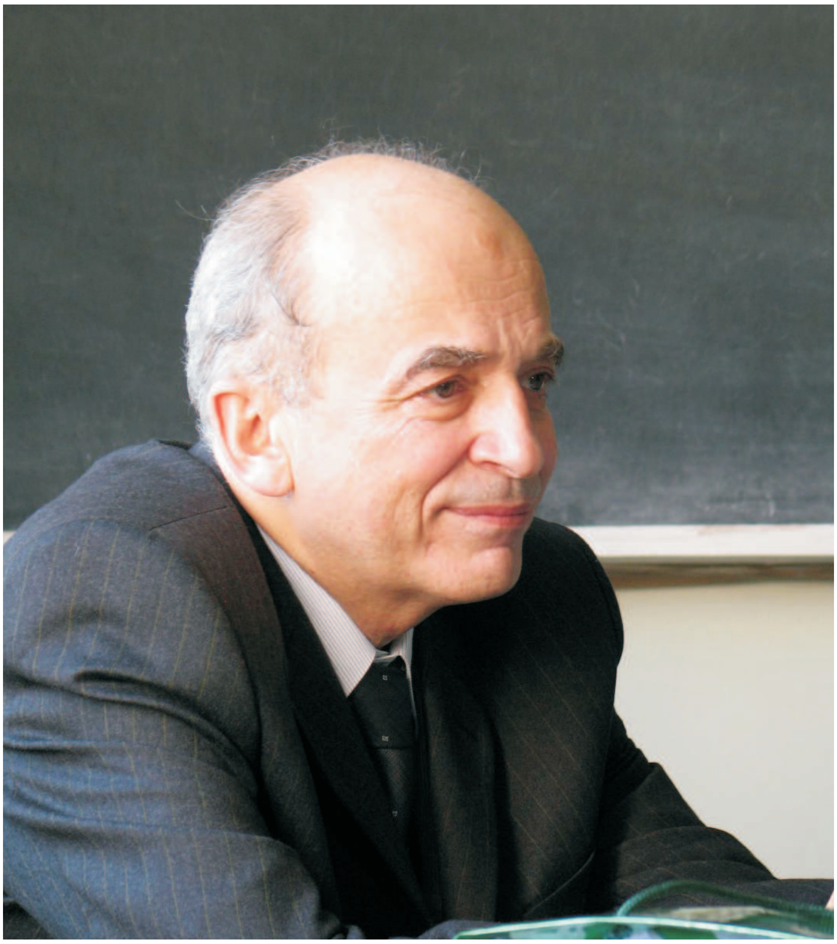
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 17, выпуск 3 июль–сентябрь, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Владикавказ
2015



Редакционная коллегия поздравляет
доктора физико-математических наук,
профессора Семёна Самсоновича Кутателадзе
с 70-летием со дня рождения

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 3, С. 5–13

УДК **514.765+517.938**

ON TOPOLOGICAL STRUCTURE OF SOME SETS RELATED TO THE NORMALIZED RICCI FLOW ON GENERALIZED WALLACH SPACES[1]

N. A. Abiev

To Semën Kutateladze
on occasion of his 70th birthday

We study topological structures of the sets $(0,1/2)^3 \cap \Omega$ and $(0,1/2)^3 \setminus \Omega$, where Ω is one special algebraic surface defined by a symmetric polynomial of degree 12. These problems arise in studying of general properties of degenerate singular points of dynamical systems obtained from the normalized Ricci flow on generalized Wallach spaces. Our main goal is to prove the connectedness of $(0,1/2)^3 \cap \Omega$ and to determine the number of connected components of $(0,1/2)^3 \setminus \Omega$.

Mathematics Subject Classification (2010): 53C30, 53C44, 37C10, 34C05, 14P05, 14Q10.

Key words: Riemannian metric, generalized Wallach space, normalized Ricci flow, dynamical system, degenerate singular point of dynamical system, real algebraic surface, singular point of real algebraic surface.

1. Introduction and the Main Result

It is known that determining the connectedness (or the number of connected components) of real algebraic surfaces is a very hard classical problem in algebraic geometry (see e. g. [4, 13]). In this paper we deal with similar problems relating to the normalized Ricci flow on generalized Wallach spaces. The importance of these problems is due to the need to develop a special apparatus for studying general properties of degenerate singular points of Ricci flows initiated in [1–3]. More concretely, in the above papers, the authors considered some problems concerning the topological structure of the sets $(0,1/2)^3 \cap \Omega$ and $(0,1/2)^3 \setminus \Omega$, where

$$\Omega = \big\{(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 : \ Q(a_1,a_2,a_3) = 0\big\}$$

is an algebraic surface (see Fig. 1 and 2) in $\mathbb{R}^3$ defined by a symmetric polynomial $Q(a_1,a_2,a_3)$ in a_1,a_2,a_3 of degree 12:

$$\begin{aligned} Q(a_1,a_2,a_3) = (2s_1+4s_3-1)\big(64s_1^5-64s_1^4+8s_1^3+12s_1^2-6s_1+1 \\ +240s_3s_1^2-240s_3s_1-1536s_3^2s_1-4096s_3^3+60s_3+768s_3^2\big) \\ -8s_1(2s_1+4s_3-1)(2s_1-32s_3-1)(10s_1+32s_3-5)s_2 \\ -16s_1^2\big(13-52s_1+640s_3s_1+1024s_3^2-320s_3+52s_1^2\big)s_2^2 \\ +64(2s_1-1)(2s_1-32s_3-1)s_2^3+2048s_1(2s_1-1)s_2^4, \end{aligned} \tag{1}$$

$$s_1 = a_1+a_2+a_3, \quad s_2 = a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3, \quad s_3 = a_1a_2a_3.$$

---

[1] The study was supported by a grant of Ministry of Education and Sciences of the Republic of Kazakhstan for 2015–2017, projects № 1452/GF4.

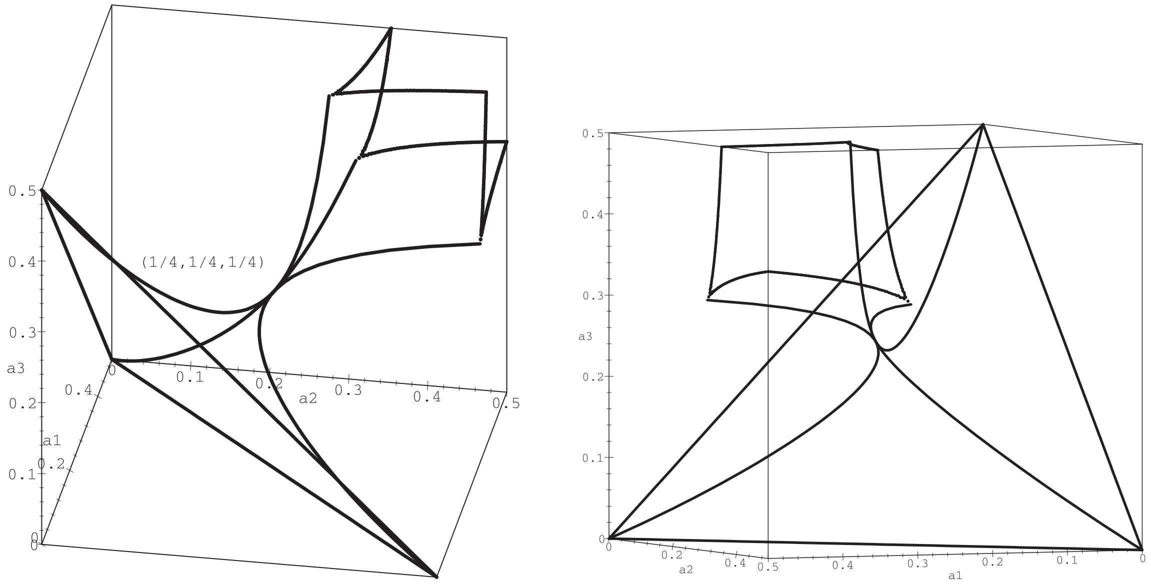


Fig. 1. Singular points of the surface $(0,1/2)^3 \cap \Omega$.

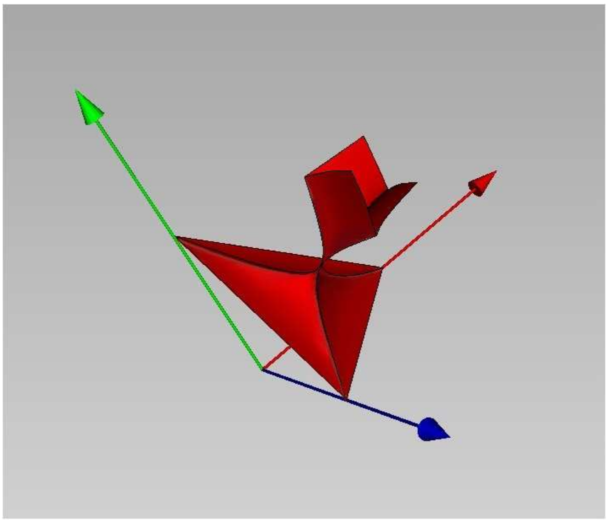


Fig. 2. The surface $(0,1/2)^3 \cap \Omega$.

The surface Ω naturally arises in studying of general properties of degenerate singular points of the following dynamical system (see [1–3]):

$$\frac{dx_1}{dt} = f(x_1,x_2,x_3), \quad \frac{dx_2}{dt} = g(x_1,x_2,x_3), \quad \frac{dx_3}{dt} = h(x_1,x_2,x_3), \tag{2}$$

where $x_i = x_i(t) > 0$, $i = 1,2,3$,

$$f(x_1,x_2,x_3) = -1 - a_1x_1\left(\frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2}\right) + x_1B,$$

$$g(x_1,x_2,x_3) = -1 - a_2x_2\left(\frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_2x_3}\right) + x_2B,$$

$$h(x_1,x_2,x_3) = -1 - a_3x_3\left(\frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_1x_3}\right) + x_3B,$$

$$B := \left(\frac{1}{a_1x_1}+\frac{1}{a_2x_2}+\frac{1}{a_3x_3}-\left(\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_1x_3}+\frac{x_3}{x_1x_2}\right)\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)^{-1}.$$

$$a_i \in (0,1/2], \quad i=1,2,3.$$

It should be noted that the system (2) can be obtained from the normalized Ricci flow equation

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}(t) = -2\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}} + 2\mathbf{g}(t)\frac{S_{\mathbf{g}}}{n},$$

where $\mathbf{g}(t)$ means a 1-parameter family of Riemannian metrics, $\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}}$ is the Ricci tensor and $S_{\mathbf{g}}$ is the scalar curvature of the Riemannian metric $\mathbf{g}$, considered on one special class of compact homogeneous spaces called three-locally-symmetric or generalized Wallach spaces, see [9, 12]. In the recent papers [7] and [11], the complete classification of these spaces was obtained.

A more detailed information concerning geometric aspects of this problem and the Ricci flows could be found in [8–10] and [14].

In [1], the authors noted that the set $(0,1/2)^3 \cap \Omega$ is connected, and the set $(0,1/2)^3 \setminus \Omega$ consists of three connected components O_1, O_2 and O_3 (see Fig. 1) containing the points $(1/6,1/6,1/6)$, $(7/15,7/15,7/15)$ and $(1/6,1/4,1/3)$ respectively.

The present work is devoted to detailed proof of this observation. The main result is the following

Theorem 1. *The following assertions hold with respect to the standard topology of* $\mathbb{R}^3$:

(1) *The set* $(0,1/2)^3 \cap \Omega$ *is connected.*

(2) *The set* $(0,1/2)^3 \setminus \Omega$ *consists of three connected components.*

We note also the following

Corollary 1. *The assertions of Theorem* 1 *are preserved if* $(0,1/2)^3$ *is replaced by* $(0,1/2]^3$.

Remark 1. The symmetry of Q with respect to a_1, a_2, a_3 implies the invariance of Ω under the permutation $a_1 \to a_2 \to a_3 \to a_1$.

Remark 2. Proof of Theorem 1 is based on the idea of Remark 8 in [2]: One should consider a segment I with one endpoint at $(0,0,0)$ and with the second endpoint at an arbitrary point of any facet of the cube $(0,1/2)^3$ containing $(1/2,1/2,1/2)$. According to Remark 1, we can assume without loss of generality that I is defined by the following parametric equations

$$a_1 := at, \quad a_2 := bt, \quad a_3 := t/2, \tag{3}$$

where $t \in [0,1]$, $a,b \in (0,1/2)$. Substituting (3) into (1) we obtain some polynomial $p(t) := Q(at,bt,t/2)$ in t of degree 12. Thus the problems under consideration could be reduced to the problem of determining the possible number of roots of $p(t)$ in $[0,1]$ when $(a,b) \in (0,1/2)^2$.

2. Proof of the Main Result

Using Maple we have the following explicit expression for $p(t)$:

$$
\begin{aligned}
p(t) &= -256b^2a^2(2a+1)^2(2b+1)^2(b+a)^2t^{12} + 32(16b^3a^3 + 4b^3a^2 + 2b^3a + 2b^3 \\
&\quad + 8b^2a^2 + b^2a + 4b^2a^3 + 2ba^3 + ba^2 + 2a^3)(2a+1)(2b+1)(2b+1+2a)(b+a)t^{10} \\
&\quad - 32(2a+1)(2b+1)(b+a)(16b^3a^3 + 4b^3a^2 + 2b^3a + 2b^3 + 8b^2a^2 + b^2a + 4b^2a^3 \\
&\quad + 2ba^3 + ba^2 + 2a^3)t^9 - (72b^2a^2 + 104ba^3 + 208b^3a^2 + 104b^3a + 208b^2a^3 + 52b^4 \\
&\quad + 176a^4b + 208b^4a^2 + 176b^4a + 52ba^2 + 52b^2a + 208a^4b^2 + 52a^4 + 352b^3a^3 + 13b^2 \\
&\quad + 13a^2 + 44a^3 + 44b^3 + 22ba)(2b+1+2a)^2t^8 + 2(2b+1+2a)(72b^2a^2 + 104ba^3 \\
&\quad + 208b^3a^2 + 104b^3a + 208b^2a^3 + 52b^4 + 176a^4b + 208b^4a^2 + 176b^4a + 52ba^2 \\
&\quad + 52b^2a + 208a^4b^2 + 52a^4 + 352b^3a^3 + 13b^2 + 13a^2 + 44a^3 + 44b^3 + 22ba)t^7 \\
&\quad + (600b^2a^2 + 392ba^3 + 784b^3a^2 + 392b^3a + 784b^2a^3 + 108b^4 + 14b + 14a + 128a^6 \\
&\quad + 448ba^5 + 224a^5 + 528a^4b + 432b^4a^2 + 528b^4a + 196ba^2 + 196b^2a + 432a^4b^2 + 108a^4 \\
&\quad + 288b^3a^3 + 224b^5 + 448b^5a + 128b^6 + 2 + 27b^2 + 27a^2 + 36a^3 + 36b^3 + 66ba)t^6 \\
&\quad - 6(8b^3 + 4b^2a + 2b^2 + 8ba + b + 4ba^2 + 2a^2 + 8a^3 + 1 + a)(2b+1+2a)^2t^5 \\
&\quad + (2b+1+2a)(40b^3 + 24ba + 5 + 40a^3)t^4 + (22b + 22a + 88ba^2 + 88b^2a + 2 \\
&\quad + 44b^2 + 44a^2 + 16a^3 + 16b^3 + 80ba)t^3 - 6(2b+1+2a)^2t^2 + (8a+8b+4)t - 1.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Consider the following set

$$
K := \big\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \; a, b \in (0, 1/2)\big\}.
$$

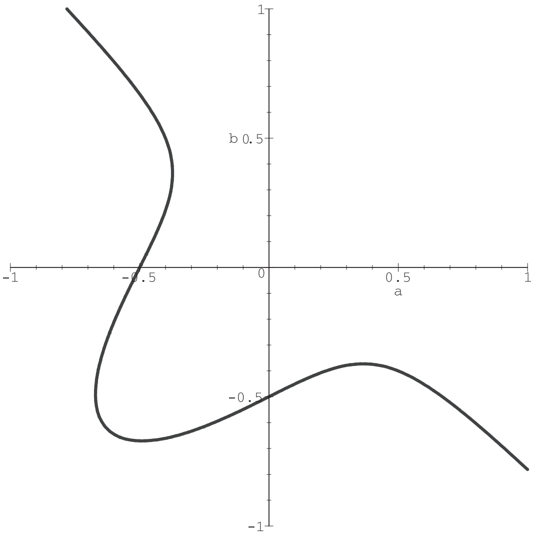


Fig. 3. The curve γ.

Lemma 1. *If $(a,b) \in K$ then the discriminant D of the polynomial $p(t)$ equals to zero if and only if $a = b$.*

$\lhd$ Easy calculations show that D is non-negative, moreover, D has the same zeroes as the following polynomial:

$$
(2b-1)^{12}(2a-1)^{12}(a-b)^{12}\big(F(a,b)\big)^2, \tag{5}
$$

where

$$F(a,b) := 40a^3 - 24a^2b - 24ab^2 + 40b^3 - 12a^2 + 12ba - 12b^2 - 6a - 6b + 5.$$

Denote by γ the curve determined by $F(a,b) = 0$ (see Fig. 3). We will prove that γ has no common point with the square K.

Changing the variables by the formula

$$x - y = a\sqrt{2}, \quad x + y = b\sqrt{2}\,,$$

we get a new equation for γ, from that we can express y explicitely:

$$\widetilde{F}(x,y) := 36\big(8x - \sqrt{2}\,\big)y^2 + \big(8x + 5\sqrt{2}\,\big)\big(2x - \sqrt{2}\,\big)^2 = 0. \tag{6}$$

Note that the point $(x', y') = (\sqrt{2}/2, 0)$ belongs to γ, moreover, this is an unique singular point of γ. Since

$$\widetilde{F}_{xx}\widetilde{F}_{yy} - \widetilde{F}_{xy}^2 = 3888 > 0$$

at (x', y'), then (x', y') is isolated according to the well-known result in differential geometry of planar curves. It is clear that the point $(a,b) = (1/2, 1/2) \notin K$ corresponds to (x', y') in the initial variables.

It is obvious that every regular point of γ satisfies the condition $x < x_0 := \sqrt{2}/8$. Hence only we need is to show that γ can not intersect the part of K, described by the conditions $x \in (0, x_0)$, $-x < y < x$. In fact, it suffices to prove the inequality $x < \varphi(x)$, where

$$\varphi(x) := \frac{\sqrt{2} - 2x}{6}\sqrt{\frac{8x + 5\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 8x}}$$

is a function determining a part of the curve γ in (6). Note that $\lim_{x \to x_0 - 0} \varphi(x) = +\infty$.

It is easy to show that the inequality $x < \varphi(x)$ is equivalent to the inequality

$$\psi(x) := 320x^3 - 48\sqrt{2}\,x^2 - 24x + 10\sqrt{2} > 0,$$

which holds for all $x \in (0, x_0)$, since $\psi(x)$ is positive at $x = x_0$ and decreases:

$$\psi\,(x_0) = 27\sqrt{2}/4 > 0, \quad \psi'(x) = 960x^2 - 96\sqrt{2}x - 24 < 0.$$

Therefore, $F(a,b) \neq 0$ for $(a,b) \in K$. Hence there is a unique possibility $a = b$ in order to $D = 0$ in K by (5). $\rhd$

Lemma 2. *Let $(a,b) \in K$. Then a point of local extremum of $p(t)$ can not be a multiple root of $p(t)$.*

$\lhd$ Multiple roots of $p(t)$ are possible only for $a = b$ by Lemma 1. Therefore, we may assume that $b = a$. Then (4) takes the following form

$$p(t) = -(t+1)\,p_2(t)\,p_3^3(t),$$

$$p_2(t) := (2 + 4a)t^2 - 2(1 + 2a)t + 1,$$

$$p_3(t) := 8a^2(2a + 1)t^3 - (1 + 4a)t + 1.$$

Denote by D_2 and D_3 the discriminants of $p_2(t)$ and $p_3(t)$ respectively:

$$D_2 := 4(2a + 1)(2a - 1),$$

$$D_3 := -32(2a + 1)(2a - 1)(22a^2 + 14a + 1)a^2.$$

Since $D_2 < 0$, $D_3 > 0$ for $a \in (0, 1/2)$, then it is clear that the polynomial $p(t)$ has exactly three distinct real roots (each of multiplicity 3) for every such a. It follows from this fact that there is no points of local extrema of $p(t)$ among the roots of $p(t)$. $\triangleright$

Further we need the curve Γ (see Fig. 4), which can be obtained as a result of the intersection Ω with the plane $a_3 = 1/2$ for $0 < a_1, a_2 \leqslant 1/2$. Recall some properties of Γ (see details in [2]): Γ determined by the equality $G(a_1, a_2) = 0$, where

$$\begin{aligned} G(a_1, a_2) := {} & 4(a_1 + a_2)(4a_1a_2 - 1)(4a_1a_2 - a_1 - a_2 + 1)(4a_1a_2 + a_1 + a_2 + 1) \\ & + (16a_1^2a_2^2 + 1)(13a_1^2 + 22a_1a_2 + 13a_2^2) - 4(a_1^2 + a_2^2)(11a_1^2 + 18a_1a_2 + 11a_2^2), \end{aligned} \tag{7}$$

Γ is homeomorphic to the segment $[0, 1]$ with the endpoints $(\sqrt{2}/4, 1/2)$, $(1/2, \sqrt{2}/4)$ and with the unique singular point (a cusp) at $(a_1, a_2) = (\tilde{a}, \tilde{a})$, where $\tilde{a} := (\sqrt{5}-1)/4 \approx 0.3090169942$.

It is easy to check that Γ separates K into disjoint connected components K_1 and K_2 containing the points

$$(a', b') := (3/10, 3/10) \quad \text{and} \quad (a'', b'') := (31/100, 31/100)$$

respectively.

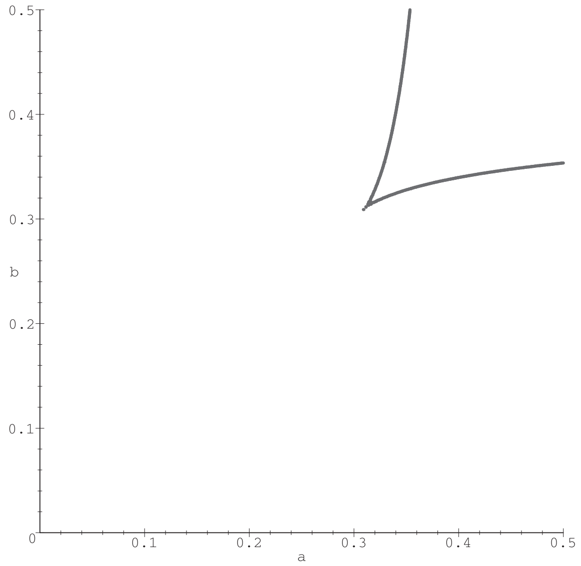


Fig. 4. The intersection Ω with the plane $a_3 = 1/2$ for $0 < a_1, a_2 \leqslant 1/2$.

Lemma 3. *In the segment* $[0, 1]$, *the polynomial* $p(t)$ *has*
(1) *one root, if* $(a, b) \in K_1$;
(2) *two distinct roots, if* $(a, b) \in K_2 \cup \Gamma$.

$\triangleleft$ Let $t^* \in [0, 1]$ be a root of $p(t)$ given by (4). We say that t^* is a robust root of $p(t)$ in $[0, 1]$, if small perturbations of the parameters a and b imply a small perturbation of t^* keeping it in $(t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon) \subset [0, 1]$ for some small $\varepsilon > 0$ (see e. g. [6] for more details on singularities of curves and some related problems).

Now, assume that t^* is a non-robust root of $p(t)$. Then there exist exactly two possibility (recall that $t^* \in [0, 1]$):

Case 1. $t^* = 0$ or $t^* = 1$;

Case 2. t^* belongs to the interval $(0, 1)$ and provides $p(t)$ a local extremum.

Now, we consider these cases separately.

Case 2. Assume that t^* is a point of local extremum of $p(t)$. Then t^* is a multiple root of $p(t)$. This contradicts to Lemma 2, hence, the case 2 is impossible.

Case 1. Since $p(0) = -1$ then there exists no pair (a, b) such that $t = 0$ is a root of $p(t)$.

Suppose that $t = 1$ is a root of $p(t)$. Since

$$p(1) = -4(a+b)^2 G(a,b),$$

where G is given by (7), then the equality $p(1) = 0$ is possible if and only if $G(a, b) = 0$.

Recall that the curve Γ is determined by $G(a, b) = 0$. Since $p(t)$ has only robust roots for every pair $(a, b) \in K_1 \cup K_2$ by our construction, then the number of roots of $p(t)$ in $[0, 1]$ is constant both in K_1 and in K_2. Hence, it is sufficient to calculate the number of such roots only for the representative points $(a', b') \in K_1$ and $(a'', b'') \in K_2$.

(1) Suppose that $(a, b) = (a', b') \in K_1$. Then (4) takes the following form

$$p(t) = -\frac{1}{9765625}\,(t+1)(16t^2 - 16t + 5)(144t^3 - 275t + 125)^3.$$

Taking into account Lemma 2, we conclude that $p(t)$ has three distinct real roots of multiplicity 3 besides the root $t = -1$. Since we does not need exact values of these roots then their approximated values are:

$$-1.569348118, \quad 0.5345099430, \quad 1.034838175.$$

(2) Now, suppose that $(a, b) = (a'', b'') \in K_2$. Then in (4) we obtain

$$p(t) = -\frac{1}{6103515625000000}\,(t+1)(81t^2 - 81t + 25)(77841t^3 - 140000t + 62500)^3,$$

with the following real roots (of multiplicity 3):

$$-1.524828329\ldots, \quad 0.5285082631\ldots, \quad 0.9963200660\ldots$$

It is easy to see that for $(a, b) \in \Gamma$ the polynomial (4) has two roots in $[0, 1]$, one of which is 1 by the definition of Γ.

Hence, in the segment $[0, 1]$, the polynomial (4) has one root for $(a, b) \in K_1$ and two roots for $(a, b) \in K_2 \cup \Gamma$. $\rhd$

$\lhd$ Proof of Theorem 1 is based on Lemma 3 and Remark 2. Let $(a, b) \in K$. Then the number of intersection points of Ω with the segment I equals to 1 or 2 depending on the number of roots of the polynomial $p(t)$ (see (4)) containing in $[0, 1]$.

(1) *Connectedness of the set* $(0, 1/2)^3 \cap \Omega$. Let t_1, t_2 be roots of $p(t)$ such that $0 < t_1 < t_2 \leqslant 1$. Then, obviously, t_1 and t_2 correspond to the "lower" and "upper" (see Fig. 2) parts of the surface $\Omega \cap (0, 1/2)^3$ respectively. These parts of Ω have a unique common point $(a_1, a_2, a_3) = (1/4, 1/4, 1/4)$ (an *elliptic umbilic* of Ω according to [1]).

(2) *The number of the connected components of the set* $(0, 1/2)^3 \setminus \Omega$. Since the maximal number of roots of $p(t)$ in $[0, 1]$ is equal to 2 and $\Omega \cap (0, 1/2)^3$ is the union of two surfaces with one common point, then the number of connected components of $(0, 1/2)^3 \setminus \Omega$ equals to 3. Theorem 1 is proved. $\rhd$

In order to prove Corollary 1 we need the following

Lemma 4. *Let* $b = 1/2$. *Then in the segment* $[0, 1]$, *the polynomial* $p(t)$ *has*

(1) *one root for* $a \in \big(0, \sqrt{2}/4\big)$;

(2) *two roots for* $a \in \big[\sqrt{2}/4, 1/2\big)$;

(3) *one root* (*of multiplicity* 8) *for* $a = 1/2$.

$\lhd$ (1), (2) At $b = 1/2$, $a \in (0, 1/2)$ we have

$$p(t) = -(2ta + 1)\, p_2(t)\, p_3^3(t)$$

in (4), where

$$p_2(t) := 4a(2a + 1)t^2 - 2(1 + 2a)t + 1,$$

$$p_3(t) := 2(1 + 2a)t^3 - 2(a + 1)t + 1.$$

For the discriminants D_2 and D_3 of the polynomials $p_2(t)$ and $p_3(t)$ we have

$$D_2 := -4(2a - 1)(2a + 1) > 0,$$

$$D_3 := 4(2a + 1)(2a - 1)(8a^2 + 28a + 11) < 0.$$

Since the cubic polynomial $p_3(t)$ achieves a positive local maximum at the point $t = -\frac{(6a+3)(a+1)}{6a+3} < 0$, then its unique real root must be a negative number. Therefore, the required roots of $p(t)$ can be provided only by $p_2(t)$, moreover, first of them belongs to $[0, 1]$ for all $a \in (0, 1/2)$; the second of them — only for $a \in \big[\sqrt{2}/4, 1/2\big)$.

(3) The case $b = a = 1/2$ leads (4) to the polynomial

$$p(t) = -(t + 1)^4(2t - 1)^8$$

with the unique root $t = 1/2$ of multiplicity 8 on $[0, 1]$. It should be noted that we get an elliptic umbilic $(a_1, a_2, a_3) = (1/4, 1/4, 1/4)$ of the surface Ω in this case. $\rhd$

$\lhd$ PROOF OF COROLLARY 1. According to Theorem 1 it is sufficient to consider the case when $a = 1/2$ or $b = 1/2$. Taking into account Remark 1, assume without loss of generality that $b = 1/2$. Then the proof of Corollary 1 follows from Lemma 4 and Remark 2. $\rhd$

REMARK 3. When this paper had been written the author was informed about the recent paper [5], where a more detailed description of the surface Ω was obtained without the restriction $(a_1, a_2, a_3) \in (0, 1/2)^3$.

The author is indebted to Prof. Yu. G. Nikonorov and to Prof. A. Arvanitoyeorgos for helpful discussions concerning this paper.

References

1. *Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G. and Siasos P.* The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces // Differ. Geom. Appl.—2014.—Vol. 35.—P. 26–43.
2. *Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G. and Siasos P.* The Ricci flow on some generalized Wallach spaces // Geometry and its Applications (Eds. V. Rovenski, P. Walczak).—Switzerland: Springer, 2014.—P. 3–37.—(Springer Proceedings in Math. & Statistics; Vol. 72).
3. *Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G., Siasos P.* The normalized Ricci flow on generalized Wallach spaces // Math. Forum; Vol. 8, p. 1. Stud. Math. Anal.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2014.—P. 25–42.—(Review of Science: The South of Russia).—[in Russian].
4. *Basu S., Pollack R. and Roy M.-F.* Algorithms in Real Algebraic Geometry.—Berlin: Springer-Verlag, 2006.—x+662 p.—(Algorithms and Computation in Math. Vol. 10).
5. *Batkhin A. B. and Bruno A. D.* Investigation of a real algebraic surface // Programming and Computer Software.—2015.—Vol. 41, № 2.—P. 74–83.
6. *Bruce J. W. and Giblin P. J.* Curves and Singularities. A Geometrical Introduction to Singularity Theory.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.—xii+222 p.
7. *Chen Zhiqi, Kang Yifang and Liang Ke.* Invariant Einstein Metrics on Three-Locally-Symmetric Spaces.—2014.—URL: arXiv:1411.2694.—(Preprint).

8. *Chow B. and Knopf D.* The Ricci Flow: an Introduction.—Providence, RI: AMS, 2004.—xii+325 p.—(Math. Surveys and Monogr.; Vol. 110).
9. *Lomshakov A. M., Nikonorov Yu. G. and Firsov E. V.* On invariant Einstein metrics on three-locally-symmetric spaces // Dokl. Math.—2002.—Vol. 66, № 2.—P. 224–227.
10. *Nikonorov Yu. G.* On a class of homogeneous compact Einstein manifolds // Sib. Mat. Zh.—2000.—Vol. 41, № 1.—P. 200–205.—[in Russian]; English transl.: Sib. Math. J.—2000.—Vol. 41, № 1.—P. 168–172.
11. *Nikonorov Yu. G.* Classification of Generalized Wallach Spaces.—2014.—URL: arXiv:1411.3131.—(Preprint).
12. *Nikonorov Yu. G., Rodionov E. D. and Slavskii V. V.* Geometry of homogeneous Riemannian manifolds // J. Math. Sci.—2007.—Vol. 146, № 7.—P. 6313–6390.
13. *Silhol R.* Real Algebraic Surfaces.—Berlin: Springer-Verlag, 1989.—x+215 p.—(Lecture Notes Math.; Vol. 1392).
14. *Topping P.* Lectures on the Ricci Flow.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006.—x+113 p.—(London Math. Soc. Lecture Note Ser.; Vol. 325).

Received December 2, 2015.

Abiev Nurlan Abievich
M. Kh. Dulaty Taraz State University,
Head of the Department of Mathematics
60 Tole bi street, Taraz, 080000, Kazakhstan
E-mail: `abievn@mail.ru`

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВ, ПОЛУЧАЕМЫХ ИЗ НОРМАЛИЗОВАННЫХ ПОТОКОВ РИЧЧИ НА ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ УОЛЛАХА

Абиев Н. А.

В работе изучается топологическая структура множеств $(0,1/2)^3 \cap \Omega$ и $(0,1/2)^3 \setminus \Omega$, где Ω — алгебраическая поверхность, определенная симметрическим многочленом степени 12. Подобные задачи возникают при изучении общих свойств вырожденных особых точек динамических систем, получаемых из нормализованных потоков Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха. Основная цель работы — доказать связность множества $(0,1/2)^3 \cap \Omega$ и определить количество связных компонент множества $(0,1/2)^3 \setminus \Omega$.

Ключевые слова: риманова метрика, обобщенное пространство Уоллаха, нормализованный поток Риччи, динамическая система, вырожденная особая точка динамической системы, действительная алгебраическая поверхность, особая точка действительной алгебраической поверхности.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 3, С. 14–22

УДК **517.9**

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ С ГЛАДКИМИ ВЕСОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ И ВОЗМУЩЕНИЕМ

А. Х. Бегматов, Г. М. Джайков

Изучаются две задачи интегральной геометрии в полосе на семействе отрезков прямых с заданной весовой функцией. Первая задача — восстановление функции в полосе, если всюду в этой полосе известны интегралы от искомой функции с линейной весовой функцией на семействе отрезков прямых. Доказаны теорема единственности и теорема существования решения задачи, получено аналитическое представление решения в классе гладких финитных функций. Представлена оценка решения задачи в соболевских пространствах, откуда следует ее слабая некорректность. Теорема единственности и оценка устойчивости получены и для задачи с возмущением, весовая функция которой имеет достаточно общий вид. Вторая задача — восстановления функции по интегральным данным на семействе отрезков прямых с весовой функцией экспоненциального вида. Доказаны теорема единственности, теорема существования решения. Построено простое представление решения рассмотренной задачи интегральной геометрии в классе гладких финитных функций. Получена оценка устойчивости решения задачи в пространствах Соболева, тем самым показана слабая некорректность задачи. Далее рассматривается соответствующая задача интегральной геометрии с возмущением. Получены теорема единственности ее решения в классе гладких финитных функций с носителем в полосе и оценка устойчивости решения в соболевских пространствах.

Ключевые слова: интегральная геометрия, преобразование Радона, преобразование Фурье, преобразование Лапласа, формула обращения, оценки устойчивости, единственность решения, теорема существования, слабая некорректность, возмущение.

1. Введение

В работе рассматриваются вопросы существования и единственности, получения оценок устойчивости и аналитических формул обращения для новых классов задач интегральной геометрии в полосе. Доказаны теоремы единственности и существования решения задач интегральной геометрии на семействе отрезков прямых в классе гладких финитных функций с носителем в полосе. Получены явные формулы обращения, из которых вытекают утверждения о слабой некорректности решения задачи. Далее рассматривается задача интегральной геометрии с возмущением. Доказаны теорема единственности и получены оценки устойчивости ее решения в классе гладких финитных функций с носителем в полосе.

Вопросы единственности решения плоской задачи интегральной геометрии на семействе парабол с возмущением рассматривались в статье [1]. В [2, 3] изучены задачи интегральной геометрии в трехмерном слое на семействе параболоидов с возмущением. В [4] рассмотрены задачи интегральной геометрии на плоскости, которые тесно связаны с задачей Радона с возмущением.

В [5] приводится теорема единственности решения задачи интегральной геометрии на кривых эллиптического типа в классе гладких финитных функций с носителем в полосе. В работе [5, 6] получено аналитическое представление для образа Фурье по первой переменной от искомой функции, из которого вытекает утверждение о сильной некорректности решения задачи. Важные результаты по обращению преобразования Радона и приложениям в сейсмической и компьютерной томографии представлены в [7–9]. Задача восстановления функции по известным интегралам от нее на семействе конусов в случае пространства четной размерности изучалась в статье [10]. В работах [11, 12] рассматривались новые постановки слабо некорректных задач интегральной геометрии на параболических кривых со специальными весовыми функциями.

Обозначим $\Omega = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^1, 0 \leqslant y \leqslant H\}$. Для всех (x,y), лежащих в полосе Ω, рассмотрим систему отрезков $\{\Upsilon(x,y)\}$:

$$\Upsilon(x,y) = \{(\xi,\eta) :\ x-\xi = y-\eta,\ 0 \leqslant \eta \leqslant y \leqslant H\}.$$

Обозначим через $C_0^2(\Omega)$ класс функций $u(x,y)$, которые имеют все непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно и финитны с носителем в полосе Ω.

2. Задача интегральной геометрии

Задача 1. Восстановить функцию двух переменных $u(x,y)$ в полосе Ω, если известны интегралы от нее по отрезкам прямых из семейства $\{\Upsilon(x,\ y)\}$ с весовой функцией $g(x,y,\xi,\eta)$:

$$\int\limits_{\Upsilon(x,y)} g(x,y,\xi,\eta)\, u(\xi,\eta)\ d\xi = f(x,y).$$

Задача решения этого уравнения есть задача интегральной геометрии вольтерровского типа (см. [13–15]).

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,y)$ известна всюду в полосе Ω, весовая функция $g(x,y,\xi,\eta)$ имеет вид $g_1(x,\xi) = x-\xi$. Тогда решение задачи 1 в классе $C_0^2(\Omega)$ единственно, имеет место представление*

$$u(x,y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x,\ y) \tag{1}$$

и выполняется неравенство

$$\|u(x,y)\|_{L_2} \leqslant C_1 \|f(x,y)\|_{W_2^{2,2}}, \tag{2}$$

где C_1 — некоторая константа.

$\lhd$ Запишем задачу 1 для весовой функции $g_1(x,\xi)$ в следующем виде:

$$\int\limits_0^y u(x-h,\eta)(y-\eta)\, d\eta = f(x,y), \tag{3}$$

где $h = y-\eta$.

Применим к обеим частям уравнения (3) преобразование Фурье по переменной x:

$$\hat{f}\left(\lambda,\,y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}\int\limits_{0}^{y}u\left(x-h,\eta\right)\left(y-\eta\right)\,d\eta\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{y}\left(y-\eta\right)e^{i\lambda h}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda(x-h)}u\left(x-h,\eta\right)\,dx\,d\eta,$$

$$\int\limits_{0}^{y}\hat{u}\left(\lambda,\eta\right)\left(y-\eta\right)e^{i\lambda(y-\eta)}\,d\eta=\hat{f}\left(\lambda,\,y\right). \tag{4}$$

Через $\hat{u}\left(\lambda,y\right)$, $\hat{f}\left(\lambda,y\right)$ обозначены преобразования Фурье по переменной x от функций $u\left(x,y\right)$ и $f\left(x,y\right)$ соответственно. Применим к последнему уравнению преобразование Лапласа по переменной y:

$$\tilde{\hat{f}}\left(\lambda,\,p\right)=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-py}\int\limits_{0}^{y}\hat{u}\left(\lambda,\eta\right)\left(y-\eta\right)e^{i\lambda(y-\eta)}\,d\eta\,dy$$

$$=\int\limits_{0}^{+\infty}\tau\cdot e^{-(p-i\lambda)\tau}d\tau\cdot\int\limits_{0}^{+\infty}\hat{u}\left(\lambda,\eta\right)e^{-p\eta}d\eta=I\left(\lambda,\,p\right)\cdot\tilde{\hat{u}}\left(\lambda,p\right),$$

$$I\left(\lambda,\,p\right)=\int\limits_{0}^{+\infty}\tau\cdot e^{-(p-i\lambda)\tau}\,d\tau=\frac{1}{\left(p-i\lambda\right)^{2}},\quad \mathrm{Re}p>0. \tag{5}$$

Отсюда следует выражение

$$\tilde{\hat{u}}\left(\lambda,p\right)=\left(p^{2}-2pi\lambda-\lambda^{2}\right)\tilde{\hat{f}}\left(\lambda,\,p\right), \tag{6}$$

где $\tilde{\hat{u}}\left(\lambda,p\right)$ и $\tilde{\hat{f}}\left(\lambda,p\right)$ — преобразование Лапласа по переменной y от функций $\hat{u}\left(\lambda,y\right)$ и $\hat{f}\left(\lambda,y\right)$ соответственно.

Применив к обеим частям (6) обратное преобразование Лапласа по переменной p, получим

$$\hat{u}\left(\lambda,y\right)=\left(\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}-2i\lambda\frac{\partial}{\partial y}-\lambda^{2}\right)\hat{f}\left(\lambda,\,y\right). \tag{7}$$

Применим к (7) обратное преобразование Фурье по λ. Исходя из известных свойств преобразований Фурье, получим

$$u\left(x,y\right)=\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}f\left(x,y\right)+2\frac{\partial^{2}}{\partial y\partial x}f\left(x,y\right)+\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}f\left(x,y\right). \tag{8}$$

Для доказательства неравенств (2) перепишем уравнение (8) в виде (9):

$$\left\|u\left(x,y\right)\right\|_{L_2}=\left\|\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}f\left(x,\,y\right)+\frac{\partial^{2}}{\partial y\partial x}f\left(x,y\right)+\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}f\left(x,\,y\right)\right\|_{L_2}. \tag{9}$$

Используя свойства дифференцирования преобразований Фурье и Лапласа, неравенство треугольника для норм, а также учитывая (9) и условия, наложенные на функцию $u\,(x,y)$, получим оценку

$$\|u\,(x,y)\|_{L_2} \leqslant C_1 \|f\,(x,y)\|_{W_2^{2,\,2}}. \ \triangleright$$

Теорема 2. *Пусть функция $f\,(x,y)$ известна всюду в полосе Ω, весовая функция $g\,(x,y,\xi,\eta)$ имеет вид $g_2\,(x,\xi) = e^{-(x-\xi)}$. Тогда решение задачи 1 в классе $C_0^1\,(\Omega)$ единственно, имеет место представление*

$$u\,(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f\,(x,y) + \frac{\partial}{\partial x} f\,(x,\,y) + f\,(x,y)\,, \tag{10}$$

и выполняется неравенство

$$\|u\,(x,y)\|_{L_2} \leqslant C_2 \|f\,(x,y)\|_{W_2^{1,\,1}}, \tag{11}$$

где C_2 — некоторая константа.

$\triangleleft$ Запишем задачу 1 для весовой функции $g_2\,(x,\xi)$ в виде

$$\int\limits_0^y u\,(x-h,\eta)\,e^{-(y-\eta)} d\eta = f\,(x,y)\,. \tag{12}$$

Применив к (12) преобразование Фурье по x, получим

$$\hat{f}\,(\lambda,\,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \int\limits_0^y u\,(x-h,\eta)\,e^{-(y-\eta)}\,d\eta\,dx,$$

$$\int\limits_0^y \hat{u}\,(\lambda,\eta)\,e^{i\lambda(y-\eta)-(y-\eta)} d\eta = \hat{f}\,(\lambda,\,y)\,. \tag{13}$$

Применим теперь к уравнению (13) преобразование Лапласа по y

$$\tilde{\hat{f}}\,(\lambda,\,p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-py} \int\limits_0^y \hat{u}\,(\lambda,\eta)\,e^{i\lambda(y-\eta)-(y-\eta)}\,d\eta\,dy$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p+1-i\lambda)\tau}\,d\tau \cdot \int\limits_0^{+\infty} \hat{u}\,(\lambda,\eta)\,e^{-p\eta}\,d\eta = I\,(\lambda,\,p) \cdot \tilde{\hat{u}}\,(\lambda,p)\,,$$

где

$$I\,(\lambda,\,p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p+1-i\lambda)\tau} d\tau = \frac{1}{p+1-i\lambda}, \quad \mathrm{Re}[p+1] > 0. \tag{14}$$

Таким образом,

$$\tilde{\hat{u}}\,(\lambda,p) = (p+1-i\lambda)\,\tilde{\hat{f}}\,(\lambda,p)\,. \tag{15}$$

Применим к (15) обратное преобразование Лапласа по p. Тогда уравнение (15) примет вид

$$\hat{u}\,(\lambda, y) = \left(\frac{\partial}{\partial y} + 1 - i\lambda\right) \hat{f}\,(\lambda, y)\,.$$

Применим к этому уравнению преобразование Фурье по переменной λ:

$$u\,(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f\,(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} f\,(x, y) + f\,(x, y)\,.$$

Неравенство (11) вытекает из уравнений (15). $\rhd$

Теорема 3. *Пусть весовая функция $g_1(x, \xi) = x - \xi$, правая часть задачи 1 известна всюду в полосе Ω и удовлетворяет следующим условиям:*

1) *$f\,(x, y)$ финитна по x;*

2) *$f\,(x, y)$ имеет все непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно;*

3) *$f\,(x, y)$ обращается в нуль вместе со своими частными производными до 2-го порядка включительно на границах полосы, т. е. при $y = 0$ и $y = H$.*

Тогда существует решение задачи 1 в классе непрерывных функций, финитных по x, определенное формулой (1).

$\lhd$ Доопределим функцию $f\,(x, y)$ при $y \geqslant H$, положив $f\,(x, y) = 0$ для $y \geqslant H$. При этом функция $u\,(x, y)$ доопределяется при $y \geqslant H$ по формуле (1). Из условий, наложенных на функции $f\,(x, y)$ ясно, что к обеим частям (1) можно применить преобразование Фурье по переменной x и преобразование Лапласа по переменной y. Используя свойства преобразований Фурье и Лапласа, получим

$$\tilde{\hat{f}}\,(\lambda,\, p) = \frac{1}{(p - i\lambda)^2}\, \tilde{\hat{u}}\,(\lambda, p)\,.$$

Используя формулу (5), можно получить

$$\tilde{\hat{f}}\,(\lambda,\, p) = I\,(\lambda, p)\ \tilde{\hat{u}}\,(\lambda, p)\,, \tag{16}$$

$$I\,(\lambda,\, p) = \int\limits_0^{+\infty} \tau\, e^{-(p - i\lambda)\tau}\, d\tau.$$

Применяя к (16) обратное преобразование Лапласа по переменной p, придем к следующему выражению:

$$\hat{f}\,(\lambda,\, y) = \int\limits_0^{y} (y - \eta)\, e^{i\lambda(y - \eta)}\, \hat{u}\,(\lambda, \eta)\, d\eta.$$

Отсюда вытекает справедливость утверждения теоремы 3. $\rhd$

Теорема 4. *Пусть весовая функция $g_2\,(x, \xi) = e^{-(x - \xi)}$, правая часть задачи 1 известна всюду в полосе Ω и удовлетворяет следующим условиям:*

1) *$f\,(x, y)$ финитна по x;*

2) *$f\,(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными;*

3) *$f\,(x, y)$ обращается в нуль вместе со своими частными производными при $y = 0$ и $y = H$.*

Тогда существует решение уравнения (12) *в классе непрерывных функций, финитных по x, определенное формулой* (10).

$\lhd$ Аналогично доказательству теоремы 3 применим к (10) преобразование Фурье по переменной x и преобразование Лапласа по переменной y:

$$\tilde{\tilde{f}}(\lambda, p) = \frac{1}{(p+1-i\lambda)}\,\tilde{\tilde{u}}(\lambda, p)\,.$$

С помощью формулы (14), получим

$$\tilde{\tilde{f}}(\lambda,\, p) = I(\lambda,\, p)\;\tilde{\tilde{u}}(\lambda, p)\,, \tag{17}$$

где

$$I(\lambda, p) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(p+1-i\lambda)\tau}\,d\tau.$$

Применяя к (17) обратное преобразование Лапласа и Фурье по переменной p и λ, приходим к следующему выражению:

$$f(x, y) = \int\limits_{0}^{y} u(x-h, \eta)\,e^{-(y-\eta)}\,d\eta.$$

Отсюда вытекает справедливость утверждения теоремы 4. $\rhd$

3. Задача интегральной геометрии с возмущением

Пусть $\Gamma(x, y) = \{(\xi, \eta) : |x-\xi| = y-\eta,\ 0 \leqslant \eta \leqslant y \leqslant H\}$, обозначим через $G(x, y)$ область, ограниченную линией $\Gamma(x, y)$ и осью Ox.

Задача 2. Восстановить функцию двух переменных $u(x, y)$ в полосе Ω, если известны суммы интегралов от нее по линиям семейства $\{\Upsilon(x,\, y)\}$ и областям $G(x, y)$ с весовыми функциями $g(x, y, \xi, \eta)$ и $K(x, y, \xi, \eta)$ соответственно:

$$\int\limits_{\Upsilon(x,y)} g(x, y, \xi, \eta)\,u(\xi, \eta)\,d\xi + \int\limits_{G(x,y)} K(x, y, \xi, \eta)\,u(\xi, \eta)\,d\xi = F(x, y)\,.$$

Теорема 5. *Пусть весовая функция $g(x, \xi)$ имеет вид $g_1(x, \xi) = x - \xi$, функция $F(x, y)$ известна в полосе Ω, весовая функция $K(x, y, \xi, \eta)$ имеет все непрерывные производные до 2-го порядка включительно и обращается в нуль вместе со своими производными на границе области $G(x, y)$.*

Тогда решение задачи 2 в классе $C_0^2(\Omega)$ единственно и имеет место оценка

$$\|u(x, y)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_3 \|F(x, y)\|_{W_2^{2,\,2}(\Omega)},$$

где C_3 — некоторая константа.

$\lhd$ Рассмотрим функцию

$$f_1(x, y) = F(x, y) - f(x, y)\,,$$

т. е. второе слагаемое из левой задачи 2

$$\int\limits_{G(x,y)} K(x,y,\xi,\eta)\, u(\xi,\eta)\; d\xi = f_0(x,y)\,. \tag{18}$$

Учитывая ограничения, наложенные на весовую функцию $K(x,y,\xi,\eta)$ и используя выражения соответствующих производных функции $f_0(x,y)$ для $y < y_0$, где y_0 достаточно мало, получим следующую оценку:

$$\|f_0(x,y)\|_{W_2^{2,2}(\Omega)} \leqslant \varepsilon \|u(x,y)\|_{L_2(\Omega)}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{19}$$

$$Au = f, \tag{20}$$

$$Au + A_1 u = F. \tag{21}$$

Из функционального анализа [16] известно, что для оператора A из (20) существует левый обратный оператор A^{-1}. Подействовав слева оператором A^{-1} на обе части уравнения (21), приходим к равенству

$$u + A^{-1}A_1 u = A^{-1}F. \tag{22}$$

Из оценок, полученных в теореме 1, и вышесказанного следует, что оператор A_1 непрерывен как оператор, действующий из пространства $L_2(\Omega)$ в пространство $W_2^{2,2}(\Omega)$ на функциях $u(x,y)$; оператор A^{-1} как оператор, действующий из пространства $W_2^{2,2}(\Omega)$ в пространство $L_2(\Omega)$, ограничен на функциях Au (следовательно, и на функциях $A_1 u$, так как оператор A_1 имеет гладкость более высокого порядка, чем оператор A). Отсюда следует, что оператор $A^{-1}A_1$ из уравнения (22) непрерывен на функциях $u(x,y)$ как оператор, действующий из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Таким образом, при достаточно малых $y < y_0$ для оператора $A^{-1}A_1$ выполняется неравенство

$$\left\|A^{-1}A_1\right\| \leqslant \varepsilon < 1. \tag{23}$$

Из принципа сжатых отображений для оператора в правой части задачи 2 следует единственность решения задачи 2 для достаточно малых y. А так как уравнение (22) есть уравнение типа Вольтерра в смысле определения, данного в [14], то единственность будет иметь место не только для малых y, но и во всем полосе Ω. Таким образом, из неравенств (19), (23) и теоремы 1 вытекает оценка

$$\|u(x,y)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_3 \|F(x,y)\|_{W_2^{2,\,2}(\Omega)},$$

где C_3 — некоторая постоянная. ▷

Теорема 6. *Пусть $F(x,y)$ известна в полосе Ω и весовая функция $g_2(x,\xi) = e^{-(x-\xi)}$. Весовая функция $K(x,y,\xi,\eta)$ имеет все непрерывные производные до первого порядка включительно и обращается в нуль вместе со своими производными на границе области $G(x,y)$.*

Тогда решение задачи 2 в классе $C_0^1(\Omega)$ единственно и имеет место оценка

$$\|u(x,y)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_4 \|F(x,y)\|_{W_2^{1,\,1}(\Omega)},$$

где C_4 — некоторая константа.

$\lhd$ Рассмотрим функцию

$$f_1\left(x,y\right) = F\left(x,y\right) - f\left(x,y\right),$$

$$\int\limits_{G(x,y)} K\left(x,y,\xi,\eta\right) u\left(\xi,\eta\right) d\xi = f_1\left(x,y\right). \tag{24}$$

Аналогично доказательству теоремы 5 для $y < y_0$, где y_0 достаточно мало, получим оценку

$$\|f_1\left(x,y\right)\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \leqslant \varepsilon \|u\left(x,y\right)\|_{L_2(\Omega)}, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{25}$$

Интегральные операторы, стоящие в левых частях задачи 1 и уравнения (24), обозначим соответственно через B и B_1. С помощью эти обозначения задача 1 и задача 2 соответственно перепишутся следующим образом:

$$Bu = f, \tag{26}$$

$$Bu + B_1 u = F. \tag{27}$$

Известно, что для оператора B из (26) существует левый обратный оператор B^{-1} [16]. Подействовав слева оператором B^{-1} на обе части уравнения (27), приходим к равенству

$$u + B^{-1}B_1 u = B^{-1}F. \tag{28}$$

Аналогично доказательству теоремы 5 покажем, что оператор $B^{-1}B_1$ из уравнения (28) непрерывен на функциях $u\left(x,y\right)$ как оператор, действующий из $L_2\left(\Omega\right)$ в $L_2\left(\Omega\right)$.

Таким образом, при достаточно малых $y < y_0$ для оператора $B^{-1}B_1$ выполняется неравенство

$$\left\|B^{-1}B_1\right\| \leqslant \varepsilon < 1. \tag{29}$$

Из принципа сжатых отображений для оператора в правой части задачи 2 следует единственность решения задачи 2 для достаточно малых y. А так как уравнение (28) есть уравнение типа Вольтерра в смысле определения, данного в [14], то единственность будет иметь место не только для малых y, но и во всей полосе Ω. Таким образом, из неравенств (25), (29) и теоремы 1 вытекает оценка

$$\|u\left(x,y\right)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_4 \|F\left(x,y\right)\|_{W_2^{1,1}(\Omega)},$$

где C_4 — некоторая постоянная. $\rhd$

Литература

1. *Лаврентьев М. М.* Задача интегральной геометрии на плоскости с возмущением // Сиб. мат. журн.—1996.—Т. 37.—С. 851–857.
2. *Бегматов А. Х.* Задача интегральной геометрии с возмущением в трехмерном пространстве // Сиб. мат. журн.—2000.—Т. 41, № 1.—С. 3–14.
3. *Бегматов А. Х.* Об одной задаче интегральной геометрии с возмущением в трехмерном пространстве // Докл. РАН.—2000.—Т. 371, № 2.—С. 155–158.
4. *Бегматов А. Х.* Об одном классе задач интегральной геометрии на плоскости // Докл. РАН.—1993.—Т. 331, № 3.—С. 261–262.
5. *Бегматов А. Х., Петрова Н. Н.* Задача интегральной геометрии с возмущением на кривых эллиптического типа в полосе // Докл. АН.—2011.—Т. 436, № 2.—С. 151–154.
6. *Бегматов А. Х., Джайков Г. М.* О восстановлении функции по сферическим средним // Докл. АН ВШ РФ.—2013.—Т. 1, № 20.—С. 6–16.

7. *Nowack R. L.* Tomography and the Herglotz–Wiechert inverse formulation // Pure and Apllied Geophysics.—1990.—Vol. 133.—P. 305–315.
8. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. яз.—М.: Мир, 1990.—288 с.
9. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи.—Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.—457 с.
10. *Бегматов Акр. Х.* Задача интегральной геометрии для семейства конусов в n-мерном пространстве // Сиб. мат. журн.—1996.—Т. 37, № 3.—С. 500–505.
11. *Бегматов А. Х., Пиримбетов А. О., Сеидуллаев А. К.* Задачи интегральной геометрии в полосе на семействах параболических кривых // Докл. АН ВШ РФ.—2012.—Т. 2, № 2 (19).—С. 6–15.
12. *Begmatov A. H., Pirimbetov A. O., Seidullaev A. K.* Reconstruction stability in some problems of X-ray and seismic tomography // Proceedings of IFOST-2012, Tomsk Polytechnic University.—2012.—Vol. 2.—P. 261–266.
13. *Begmatov A. H.* Integral geometry problems of Volterra type // Integral methods in science and engineering / Eds. B. Bertram, C. Constanda and A. Struthers.—Boka Raton, Fl: Chapman Hall/CRC, 2000.—P. 46–50.—(Research Notes in Math. Ser., Vol. 418).
14. *Лаврентьев М. М, Романов В. Г, Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа.—М.: Наука, 1980.—286 с.
15. *Бегматов А. Х.* О единственности решения задачи интегральной геометрии вольтерроского типа на плоскости // Докл. АН.—2009.—Т. 427, № 4.—С. 439–441.
16. Функциональный анализ. Справочная математическая библиотека / Под ред. С. Г. Крейна.—М.: Наука, 1972.—544 с.

Статья поступила 29 июля 2014 г.

Бегматов Акбар Хасанович
Новосибирский государственный технический университет,
профессор кафедры инженерной математики
РОССИЯ, 630073, Новосибирск, пр-т К. Маркса, 20
E-mail: `begah@ngs.ru`

Джайков Гафур Муратбаевич
Новосибирский государственный технический университет,
аспирант кафедры инженерной математики
РОССИЯ, 630073, Новосибирск, пр-т К. Маркса, 20
E-mail: `gafur_djaykov@mail.ru`

LINEAR PROBLEM OF INTEGRAL GEOMETRY WITH SMOOTH WEIGHT FUNCTIONS AND PERTURBATION

Begmatov A. H. and Djaykov G. M.

We study two problems of integral geometry in a strip on a family of line segments with a given weight function. In the first case, we consider the problem of reconstruction a function in a strip, if we know the integrals of the sought function on the family of line segments with a given weight function of a special kind. An analytical representation of a solution in the class of smooth finite functions is obtained and the uniqueness and existence theorems for a solution of the problem are proved. A stability estimate of solution in Sobolev spaces is presented, which implies its weakly ill-posedness. For the problem with perturbation the uniqueness theorem and stability estimate of solution were obtained. In the second case, we considered the problem of reconstructing a function given by integral data on the family of line segments with a weight function of exponential type. The uniqueness and existence theorems of a solution are proved. A simple representation of a solution in the class of smooth finite functions is constructed. Next, we consider the corresponding problem of integral geometry with perturbation. The uniqueness theorem in the class of smooth finite functions in a strip is proved and a stability estimate of a solution in Sobolev spaces is received.

Key words: problems of integral geometry, Radon transform, Fourier transform, Laplace transform inversion formula, stability estimates, uniqueness of the solution, existence theorem, weakly Ill-posedness, perturbation.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 3, С. 23–35

УДК **519.682.1+519.683+519.7+519.1**

OBJECT-ORIENTED DATA AS PREFIX REWRITING SYSTEMS

A. E. Gutman

To S. S. Kutatelaze on the occasion
of his 70th birthday

A deterministic longest-prefix rewriting system is a rewriting system such that there are no rewriting rules $X \to Y$, $X \to Z$ with $Y \neq Z$, and only longest prefixes of words are subject to rewriting. Given such a system, analogs are defined and examined of some concepts related to object-oriented data systems: inheritance of classes and objects, instances of classes, class and instance attributes, conceptual dependence and consistency, conceptual scheme, types and subtypes, etc. A special attention is paid to the effective verification of various properties of the rewriting systems under consideration. In particular, algorithms are presented for answering the following questions: Are all words finitely rewritable? Do there exist recurrent words? Is the system conceptually consistent? Given two words X and Y, does X conceptually depend on Y? Does the type of X coincide with that of Y? Is the type of X a subtype of that of Y?

Mathematics Subject Classification (2000): 68Q42, 68P05, 68N19, 68T30.

Key words: prefix rewriting, term rewriting, object-oriented data system, information system, consistency verification, ontology of a data model.

1. Introduction

The classical object-oriented approach to describing structured data employs the two primary relations, *has* (or "*has a*") and *is* (or "*is a*").

The *has* relation links objects (and classes) with their attributes. By saying "`X` *has a* `Y`" we mean that the object (or class) `X` possesses an attribute named `Y`, and we thus can speak of "*the* `Y` *of* `X`" or "`X`*'s* `Y`" as a property of `X` conventionally denoted by `X.Y`. For instance, if a web page has a submit button whose style assumes a border of a particular width, we can speak of "the width of the border of the style of the submit button of the page" and thus arrive at the object `page.submitButton.style.border.width`.

The *is* relation can be used for (1) instantiating objects from classes; (2) inheriting classes from classes; and (3) assigning values to attributes. By saying "`40` *is an* `Integer`" we associate the object `40` with the class `Integer` and mean that `40` is an instance of `Integer`. The phrase "`Integer` *is* `Number`" means that the class `Integer` inherits from the class `Number`. By claiming that "`John.age` *is* `40`" we assign the value `40` to the `age` attribute of `John`.

As is seen from the above examples, the wide interpretation of the *is* relation makes it possible to eliminate the difference between objects and classes. A single data system can syndicate the class declarations ("metadata") and the object instantiations and initializations ("data"). We do not assert that data and metadata are worth more combined than separated;

nevertheless, this approach allows us to unify data analysis and develop a common tool for verifying conceptual and semantical consistency.

The *is* and *has* relations are naturally connected. By interpreting "*is*" as "inherits," we assume that if "`X` is `Y`" then all the attributes of `Y` are inherited by `X`. In particular, if "`X` is `Y`" and "`Y` has a `Z`" then "`X` has a `Z`." Moreover, if "`X` is `Y`" is the only explicit information on `X`, we can conclude that "`X.Z` is `Y.Z`." (By the explicit information we mean the *is* rules which form the data system under consideration.) In doing so, we derive an *implicit* information on `X` and say that "`X.Z` *is* `Y.Z` *implicitly*." Therefore, when evaluating the object `X.Z`, we rewrite its prefix `X` with `Y` according to the explicit rule "`X` is `Y`." The same is applicable to objects of any length. For instance, if we know explicitly that "`A.B` is `P.Q.R`" then `A.B.C.D` rewrites implicitly to `P.Q.R.C.D`.

It is clear that the explicit rules supersede any implicit derivatives; therefore, if "`X` is `Y`," "`Y` has a `Z`," and the data system contains the explicit rule "`X.Z` is `A`," the latter wins over the implicit "`X.Z` is `Y.Z`." However, a conflict of another kind is possible in case several explicit rules are simultaneously applicable. Consider the following fragment of a data system:

```
block.style.color  is blue
header.style.color is red
button             is block
button.style       is header.style
```

Let us try to evaluate the button's style color, i.e., `button.style.color`. Since `button` is a `block`, we might conclude that `button.style.color` is `block.style.color`, which is `blue`. On the other hand, `button.style` is `header.style`; therefore, `button.style.color` is `header.style.color`, which is `red`. Intuitively, the latter evaluation should win, since "`button.style` is `header.style`" seems to take priority over "`button` is `block`." The reason is not the fact that the former rule occurs next to the latter (we treat a data system as an unordered set of *is* rules). The key point is that the rule "`button.style` is `header.style`" is more *concrete* as it evaluates a longer object, `button.style` rather than `button`. Therefore, when evaluating an object, we should *rewrite the longest prefix* (i.e., use the most concrete rule applicable).

We will now dwell on *data consistency*. Obviously, when designing a set of definitions, conceptual cycles should be avoided. By saying "`man` is `man`" we define nothing, since evaluation of `man` results in a dead cycle. However, conceptual consistency in no way outlaws recursion. For instance, the rule "`man.son` is `man`" is quite legal. On the other hand, the rule "`man` is `man.son`" seems incorrect: we still do not know what *man* is unless *man*'s *son* is defined, while the latter is senseless prior to defining *man*. Furthermore, the rules "`man` is `Adam`" and "`Adam.rib` is `man.rib`" form an inconsistent pair, since `Adam.rib` is `man.rib`, while the latter implicitly rewrites to `Adam.rib`. Such examples justify the need for a formal definition of conceptual consistency and the search for the corresponding effective verification. (This is similar to analyzing the ontology of a data system as a set of concept definitions.)

It is clear that, prior to defining a set of concepts (classes or objects), we need at least one concept which does not require definition. In general, there can be several primary concepts; however, a single "generic object" is sufficient. We denote the latter by ω. Given a data system and a word X of the form $\texttt{entity.attr}_1.\texttt{attr}_2.\cdots.\texttt{attr}_n$, we rewrite X by applying the most concrete *is* rule, thus obtaining a new word, and continue rewriting the longest prefixes of the subsequent words until ω is reached. In this case we conclude that the initial word X is an *object* (or a *concept*). Otherwise, if the rewriting process either

(1) ends with a nonrewritable word other than ω or (2) never terminates, we claim that X is senseless. The possibility of (2) makes the analysis nontrivial and justifies the search for an effective verification if a given word makes sense. (This is close to analyzing the ontology of a concept within a data system.)

Given an object X and a word δ of the form $\mathtt{attr}_1\mathtt{.}\mathtt{attr}_2\mathtt{.}\cdots\mathtt{.}\mathtt{attr}_n$, say that δ is a *detail* of X if $X\mathtt{.}\,\delta$ makes sense. The set $\|X\|$ of all details of X can be regarded as the *type* of X. Whenever an algorithmic procedure assumes a formal argument A, the body of the procedure contains A along with some words $A\mathtt{.}\delta_i$. For the procedure to operate correctly with X substituted for A, it is necessary (and probably sufficient) that all the words $X\mathtt{.}\delta_i$ make sense. This results in the requirement that X be of an appropriate type. Therefore, we need an algorithm for comparing object types: given two objects X and Y, we should be able to effectively compare the types of X and Y, i.e., determine which of the relations $\|X\| = \|Y\|$, $\|X\| \subseteq \|Y\|$, $\|X\| \supseteq \|Y\|$ hold. The problem is not trivial if for no other reason than the fact that the type of an object can be infinite. (For instance, given the rule "`man.son` is `man`," the type of `man` contains all the words `son`, `son.son`, `son.son.son`, ...)

In what follows we give formal definitions for the notions under consideration, state some results, and present algorithms for all the problems mentioned above. (The paper does not contain proofs of the theorems and justifications of the algorithms. All the details, including various examples, will be published elsewhere.)

To make notation less cumbersome, we treat the names of entities and attributes as single symbols (letters) of some alphabet $\mathbb{A}$ and agree to write the property paths $\alpha_1\mathtt{.}\alpha_2\mathtt{.}\cdots\mathtt{.}\alpha_n$ as $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ thus making them words over $\mathbb{A}$. The explicit rules "X *is* Y" will be written as $X \to Y$.

2. Definitions and Main Results

Throughout the paper, $\mathbb{A}$ is a finite alphabet and $\mathbb{A}^*$ (resp. $\mathbb{A}^+$) is the set of all (all nonempty) words over $\mathbb{A}$. The elements of $\mathbb{A}$ are called *letters*. We conventionally identify the letters with the corresponding single-letter words. Say that X is a *prefix* (resp. a *proper prefix*) of $Y \in \mathbb{A}^+$ and write $X \sqsubseteq Y$ or $Y \sqsupseteq X$ ($X \sqsubset Y$ or $Y \sqsupset X$) if $X \in \mathbb{A}^+$ and $Y = XS$ for some $S \in \mathbb{A}^*$ ($S \in \mathbb{A}^+$). The length of a word X is denoted by $|X|$. Given an integer $n \geqslant 1$ and a word $X \in \mathbb{A}^+$ such that $|X| \geqslant n$, define $X{\restriction_n} \in \mathbb{A}^+$ so that $X{\restriction_n} \sqsubseteq X$ and $\bigl|X{\restriction_n}\bigr| = n$. For brevity, in the sequel we say "word" instead of "nonempty word over $\mathbb{A}$."

Given any binary relation $\rightsquigarrow$, we conventionally denote by $\overset{+}{\rightsquigarrow}$ the transitive closure of $\rightsquigarrow$ and by $\overset{*}{\rightsquigarrow}$, the reflexive transitive closure of $\rightsquigarrow$.

Consider a finite binary relation $\to$ on $\mathbb{A}^+$ (i.e., a finite subset of $\mathbb{A}^+ \times \mathbb{A}^+$) and a letter $\omega \in \mathbb{A}$. Say that the pair $\langle \to, \omega \rangle$ is a *deterministic longest-prefix rewriting system*, or a *system* for short, if $\to$ is nonempty and the following hold:

(a) $X \to Y$ and $X \to Z$ imply $Y = Z$;

(b) there are no $S, Y \in \mathbb{A}^*$ such that $\omega S \to Y$.

Put $\mathbb{E} := \{X : X \to Y \text{ for some } Y\}$ and call the elements of $\mathbb{E}$ *explicit words*. Say that E is an *explicit prefix* of X if $E \in \mathbb{E}$ and $E \sqsubseteq X$. Say that a word X is *rewritable* if X has an explicit prefix.

As is easily seen, condition (a) means that, for each $E \in \mathbb{E}$, there is a unique word E' such that $E \to E'$, while condition (b) amounts to the fact that all words of the form ωS, with $S \in \mathbb{A}^*$, are not rewritable.

Given a rewritable word X, consider the longest explicit prefix E of X, determine the suffix $S \in \mathbb{A}^*$ so that $X = ES$, and put $X' := E'S$. We call X' *the rewrite* of X. Introduce the binary relation $\Rightarrow$ on $\mathbb{A}^+$ by setting $X \Rightarrow Y$ if and only if X is a rewritable word and $Y = X'$.

By way of recursion, put $\mathbb{W}_0 := \mathbb{A}^+$, $X^{(0)} := X$ for $X \in \mathbb{W}_0$ and, for each $n \geqslant 1$, put $\mathbb{W}_n := \{X \in \mathbb{W}_{n-1} : X^{(n-1)} \text{ is rewritable}\}$ and $X^{(n)} := (X^{(n-1)})'$ for $X \in \mathbb{W}_n$. The word $X^{(n)}$ is called the *nth rewrite* of X. It is clear that, for each $X \in \mathbb{W}_n$, we have $X = X^{(0)} \Rightarrow X^{(1)} \Rightarrow \dots \Rightarrow X^{(n)}$, $X \overset{+}{\Rightarrow} X^{(n)}$ for $n > 0$, and $X \overset{*}{\Rightarrow} X^{(n)}$ for $n \geqslant 0$.

The elements of $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{W}_n$ are called *infinitely rewritable words.* The other words are *finitely rewritable.* Given a word X, call the maximal (finite or infinite) sequence of the form $\langle X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots \rangle$ the *rewriting sequence* of X. Therefore, a word X is finitely (infinitely) rewritable if and only if the rewriting sequence of X is finite (infinite).

Say that $X \in \mathbb{A}^+$ is an *object* if $X \overset{*}{\Rightarrow} \omega$. Let $\mathbb{O}$ be the set of all objects. Note that the rewriting sequence of every object $X \in \mathbb{O}\backslash\{\omega\}$ has the form $X = X^{(0)} \Rightarrow \dots \Rightarrow X^{(n)} \to \omega$, where $n \geqslant 0$.

From the above notation and definitions it is clear that we treat a system $\langle \to, \omega \rangle$ as a rewriting system and assume that only longest prefixes of words are subject to rewriting. The system is then regarded as a recognition device, with $\mathbb{O}$ the accepted language (see [1]). We have called such a system "deterministic," since every rewritable word has a unique rewrite.

We may regard the notion of an object as isolating "concepts" from "senseless words." An object is a word X possessing a "meaning," the rewrite $X' = X^{(1)}$, which also possesses a meaning, $(X')' = X^{(2)}$, and so on up to the final rewrite, the "generic object" ω, whose meaning is assumed predefined. The relation $\to$ is thus treated as conceptual definition, and a rule $X \to Y$ is regarded as a definition of X via Y: "X is a Y." Next, a rule $X\alpha \to Z$ is an attribute definition, "the α of X is a Z," while $X\alpha\beta \to Z$ means "the β of the α of X is a Z," etc. In this respect, condition (a) imposed on the relation $\to$ amounts to conceptual unambiguity (no concept can have several meanings).

We may also treat the relation $\to$ as object-oriented inheritance or instantiation and regard a rule $X \to Y$ as an explicit indication of the fact that "class X directly inherits class Y" or "object X is an instance of class Y." Next, a rule $X\alpha \to Z$ may be regarded as an attribute declaration or property evaluation: "class X has attribute α of class Z" or "the property $X\alpha$ has value Z" or "the property $X\alpha$ is an instance of class Z." In this respect, having imposed condition (a) on the relation $\to$, we thereby disallowed multiple inheritance (therefore, no object can belong to several incomparable classes).

Introduce the binary relation $\Rightarrow_{\mathrm{w}}$ on $\mathbb{A}^+$ by setting $X \Rightarrow_{\mathrm{w}} Y$ if and only if $X = ES$ and $Y = E'S$ for some $E \in \mathbb{E}$, $S \in \mathbb{A}^*$. Therefore, $\Rightarrow_{\mathrm{w}}$ is the rewriting corresponding to the system $\langle \to, \omega \rangle$ regarded as an ordinary prefix rewriting system rather than a longest-prefix rewriting system. (It is clear that $X \to Y$ implies $X \Rightarrow Y$, and $X \Rightarrow Y$ implies $X \Rightarrow_{\mathrm{w}} Y$. We may thus read the formulas $X \overset{+}{\Rightarrow} Y$ and $X \overset{+}{\Rightarrow}_{\mathrm{w}} Y$ as "*X rewrites to Y*" and "*X weakly rewrites to Y.*" The formula $X \to Y$ can be read as "*X explicitly rewrites to Y.*")

Introduce the binary relation $\rightarrowtail$ on $\mathbb{A}^+$ by setting $X \rightarrowtail Y$ if and only if $X \sqsupset Y$ or $X \Rightarrow_{\mathrm{w}} Y$. As is easily seen, the transitive closure $\overset{+}{\rightarrowtail}$ is the least transitive relation on $\mathbb{A}^+$ possessing the following three properties for all $X, Y, S \in \mathbb{A}^+$:

$$\text{if } X \to Y \text{ then } X \overset{+}{\rightarrowtail} Y; \qquad \text{if } X \to Y \text{ then } XS \overset{+}{\rightarrowtail} YS; \qquad XS \overset{+}{\rightarrowtail} X.$$

In case $X \overset{+}{\rightarrowtail} Y$ we say that X *depends on* Y. A word X is *well-defined* if X does not depend on X. Say that a system $\langle \to, \omega \rangle$ under consideration is *conceptually consistent* if all words are well-defined, i.e., no word depends on itself. For brevity, introduce the following named condition:

$$\text{The system is conceptually consistent.} \tag{Con}$$

The above terminology is justified by our informal treatment of a rewriting rule $X \to Y$ as a definition of X via Y ("X is a Y") and regarding a rule $XS \to Z$ as a detail definition ("the S of X is a Z"). Therefore, informally, the relation $X \overset{+}{\rightarrowtail} Y$ can be understood as follows: the definition of X explicitly or implicitly employs Y; in particular, when subsequently describing a conceptual scheme, the concept Y should be introduced before X, otherwise X becomes ill-defined.

If $\rightsquigarrow$ is a binary relation on $\mathbb{A}^+$, put $|\rightsquigarrow| := \{X \in \mathbb{A}^+ : E \overset{*}{\rightsquigarrow} X \text{ for some } E \in \mathbb{E}\}$ and denote by $[\rightsquigarrow]$ the directed graph whose nodes are the words in $|\rightsquigarrow|$ and arcs are the pairs $\langle X, Y\rangle$ such that $X, Y \in |\rightsquigarrow|$ and $X \rightsquigarrow Y$.

Given a system, we call $[\rightarrowtail]$ the *conceptual scheme* and $[\Rightarrow_{\mathrm{w}}]$ the *weak rewriting scheme.* Since $X \Rightarrow_{\mathrm{w}} Y$ implies $X \rightarrowtail Y$, the weak rewriting scheme is a subgraph of the conceptual scheme.

Proposition 1. *Given $X, Y \in \mathbb{A}^+$, we have $X \overset{+}{\rightarrowtail} Y$ if and only if $X \sqsupset Y$ or $X \overset{+}{\Rightarrow}_{\mathrm{w}} YS$ for some $S \in \mathbb{A}^*$.*

Say that a word X is *weakly recurrent* if $X \overset{+}{\Rightarrow}_{\mathrm{w}} XS$ for some $S \in \mathbb{A}^*$.

Corollary 2. *A word is well-defined if and only if it is not weakly recurrent.*

Theorem 3. *The following properties of a system are equivalent:*

(1) *all words are well-defined, i.e.,* (Con) *holds;*
(2) *each explicit word is well-defined;*
(3) *there are no weakly recurrent explicit words;*
(4) *there are no weakly recurrent words;*
(5) *the conceptual scheme is acyclic;*
(6) *the conceptual scheme is acyclic and finite;*
(7) *the weak rewriting scheme is acyclic and finite.*

Say that a word X is *recurrent* if $X \overset{+}{\Rightarrow} XS$ for some $S \in \mathbb{A}^*$. Introduce the following named condition:

$$\text{There are no recurrent words.} \tag{Rec}$$

Proposition 4. (Con) *implies* (Rec).

Put $\mathbb{A}_{\mathbb{E}} := \min\{A \subseteq \mathbb{A} : \mathbb{E} \subseteq A^+\}$, i.e., $\mathbb{A}_{\mathbb{E}}$ is the *explicit alphabet*, the set of all letters occurred in explicit words. In addition, put $\mu := \max\{|E| : E \in \mathbb{E}\}$.

Theorem 5. *If each word $X \in \mathbb{A}_{\mathbb{E}}^+$ with $|X| \leqslant \mu$ is not recurrent then all words are not recurrent, i.e.,* (Rec) *holds.*

Remark 6. Let $B(\mathscr{S})$ be a set of words defined via a system $\mathscr{S}$ by some condition. Say that $B(\mathscr{S})$ is a *recurrence basis* if, given an arbitrary system $\mathscr{S}$, nonrecurrence of all words in $B(\mathscr{S})$ implies nonrecurrence of all words. Theorem 5 states that the set $\{X \in \mathbb{A}_{\mathbb{E}}^+ : |X| \leqslant \mu\}$ is a recurrence basis. Despite its finiteness, the set can be rather large. However, we are not aware of conditions which determine considerably smaller recurrence bases. (There are examples showing that neither the set $\mathbb{E}$ of explicit words, nor the set of all prefixes of the explicit words can serve as a recurrence basis.)

Introduce the following named condition:

$$\text{All words are finitely rewritable.} \tag{Fin}$$

Theorem 7. *If each explicit word is finitely rewritable then all words are finitely rewritable, i.e.,* (Fin) *holds.*

Theorem 8. (Rec) *implies* (Fin).

Therefore, according to Proposition 4 and Theorem 8, we have the implications (Con) $\Rightarrow$ (Rec) $\Rightarrow$ (Fin). As examples show, the converse implications are not true in general.

Introduce the following two named conditions:

$$\text{All explicit words are objects, i.e., } \mathbb{E} \subseteq \mathbb{O}. \tag{Obj}$$

$$\text{If } X \in \mathbb{A}^{+},\ \alpha \in \mathbb{A}, \text{ and } X\alpha \in \mathbb{E} \text{ then } X \in \mathbb{O}. \tag{PreObj}$$

Proposition 9. (1) *Let* $X, Y \in \mathbb{A}^{+}$, $X \overset{*}{\Rightarrow} Y$. *Then* $X \in \mathbb{O}$ *if and only if* $Y \in \mathbb{O}$.

(2) *Assume* (Obj). *Then, given* $X \in \mathbb{A}^{+}$, *we have* $X \in \mathbb{O}\backslash\{\omega\}$ *if and only if* $X \overset{*}{\Rightarrow} E$ *for some* $E \in \mathbb{E}$.

(3) *Assume* (PreObj). *If* $X, S \in \mathbb{A}^{+}$ *and* $XS \in \mathbb{O}$ *then* $X \in \mathbb{O}$.

Let $X \in \mathbb{O}$ and $\alpha \in \mathbb{A}$. Say that α is an *attribute* of X if $X\alpha \in \mathbb{O}$. Denote by $\|X\|_1$ the set of all attributes of X. It is clear that $\|\omega\|_1 = \varnothing$.

Say that α is an *explicit attribute* (resp. *implicit attribute*) of X if $X\alpha \in \mathbb{O}\cap\mathbb{E}$ ($X\alpha \in \mathbb{O}\backslash\mathbb{E}$).

Say that α is an *overriding attribute* (resp. *added attribute*) of X if $X\alpha \in \mathbb{O} \cap \mathbb{E}$ and, in addition, $X'\alpha \in \mathbb{O}$ ($X'\alpha \notin \mathbb{O}$). If α is an overriding attribute of X, we say that $X\alpha$ *overrides* $X'\alpha$.

Therefore, every attribute is either explicit or implicit, and every explicit attribute is either overriding or added.

Proposition 10. *For all* $X \in \mathbb{O}\backslash\{\omega\}$ *and* $\alpha \in \mathbb{A}$ *the following hold:*

(1) α *is an implicit attribute of* X *if and only if* $X\alpha \notin \mathbb{E}$ *and* $X'\alpha \in \mathbb{O}$;

(2) α *is an added attribute of* X *if and only if* $X\alpha \in \mathbb{O}$ *and* $X'\alpha \notin \mathbb{O}$.

Proposition 11. *Assume* (Obj). *If* $X, Y \in \mathbb{A}^{+}$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $X \overset{*}{\Rightarrow} Y$, *and* $Y\alpha \in \mathbb{O}$ *then* $X\alpha \in \mathbb{O}$.

Proposition 12. *Assume* (Obj). *Consider the rewriting sequence* $X = X^{(0)} \Rightarrow \dots \Rightarrow X^{(n)} = \omega$ *of an object* X. *If* $\alpha \in \|X\|_1$ *then there is a number* $0 \leqslant i \leqslant n$ *such that* $X^{(0)}\alpha, \dots, X^{(i)}\alpha \in \mathbb{O}$, $X^{(i+1)}\alpha, \dots, X^{(n)}\alpha \notin \mathbb{O}$, *and* α *is an added attribute of* $X^{(i)}$.

Corollary 13. *Assume* (Obj). *A letter* α *is an attribute of an object* X *if and only if there is a number* $n \geqslant 0$ *such that* $X^{(n)}\alpha \in \mathbb{E}$.

Given an object X, say that δ is a *detail* of X if $\delta \in \mathbb{A}^{+}$ and $X\delta \in \mathbb{O}$. Denote by $\|X\|$ the set of all details of X and call $\|X\|$ the *type of* X. (It is clear that $\|\omega\| = \varnothing$.) Note that the set $\mathbb{O}$ of all objects can be infinite and, moreover, some object types $\|X\|$ can be infinite. On the other hand, we will see that the set $\{\|X\| : X \in \mathbb{O}\}$ of all object types is always finite (see Theorem 27).

Proposition 14. *For all objects* X *and* Y *we have*

(1) *if* $\|X\| = \|Y\|$ *then* $\|X\delta\| = \|Y\delta\|$ *for all* $\delta \in \|X\|$;

(2) *if* $\|X\| \subseteq \|Y\|$ *then* $\|X\delta\| \subseteq \|Y\delta\|$ *for all* $\delta \in \|X\|$.

On assuming (PreObj), *we also have*

(3) $\|X\| = \|Y\|$ *if and only if* $\|Y\|_1 = \|X\|_1$ *and* $\|X\alpha\| = \|Y\alpha\|$ *for all* $\alpha \in \|X\|_1$;

(4) $\|X\| \subseteq \|Y\|$ *if and only if* $\|X\|_1 \subseteq \|Y\|_1$ *and* $\|X\alpha\| \subseteq \|Y\alpha\|$ *for all* $\alpha \in \|X\|_1$.

Proposition 15. *If* $X, Y \in \mathbb{O}$, $X \Rightarrow Y$, $XS \notin \mathbb{E}$ *for all* $S \in \mathbb{A}^{+}$ *then* $\|X\| = \|Y\|$.

If we informally interpret the relation $X \overset{+}{\Rightarrow} Y$ as “X inherits Y” (or “X is a particular case of Y” or “X is a Y”) and treat the objects $X\alpha$ as “properties of X,” then in case $X \overset{+}{\Rightarrow} Y$

the object X should in a sense inherit the properties of Y and optionally make them more concrete and enlarge their totality. Formally, this requirement amounts to the following:

$$\text{if } X, Y \in \mathbb{O} \text{ and } X \overset{+}{\Rightarrow} Y \text{ then } \|X\| \supseteq \|Y\|. \tag{$*$}$$

Introduce the following named condition:

$$\begin{array}{l}\text{If } X, Y \in \mathbb{A}^+,\ \alpha \in \mathbb{A},\ X\alpha \in \mathbb{E},\ Y\alpha \in \mathbb{O}, \text{ and } X \Rightarrow Y\\ \text{then } X\alpha \in \mathbb{O} \text{ and } \|X\alpha\| \supseteq \|Y\alpha\|.\end{array} \tag{CoInh}$$

Theorem 16. *Assume* (PreObj)*. The following are equivalent:*
(1) *condition* (CoInh) *is satisfied;*
(2) *if* $X, Y \in \mathbb{O}\backslash\{\omega\}$ *and* $X \Rightarrow Y$ *then* $\|X\| \supseteq \|Y\|$*;*
(3) *if* $X, Y \in \mathbb{O}$ *and* $X \overset{*}{\Rightarrow} Y$ *then* $\|X\| \supseteq \|Y\|$*.*

Therefore, with (PreObj) satisfied, ($*$) is equivalent to (CoInh).

Corollary 17. *Assume* (PreObj) *and* (CoInh)*. If* $X, Y, S \in \mathbb{A}^+$*,* $X \overset{*}{\Rightarrow} Y$*, and* $YS \in \mathbb{O}$ *then* $XS \in \mathbb{O}$ *and* $\|XS\| \supseteq \|YS\|$*. In particular, if* $Y \in \mathbb{O}$ *and* $X \overset{*}{\Rightarrow} Y$ *then* $\|Y\|_1 \supseteq \|X\|_1$ *and* $\|X\alpha\| \supseteq \|Y\alpha\|$*.*

Object systems with attribute value typing usually satisfy the following (or analogous) requirements: Suppose that a class Y has a declared attribute α with value type τ. If x is an instance of Y then x has attribute α whose value type is equal to or more concrete than τ. Similarly, if X is a class inherited from Y then X has the inherited attribute α whose value type is equal to or more concrete than τ. If we interpret the relation $X \Rightarrow Y$ as "the object X is an instance of the class Y" or "the class X directly inherits the class Y" and treat the relation $X\alpha \to V$ as "V is the explicit value of the property $X\alpha$" or "V is the declared value class of the attribute α within the class X," then the above requirements can be formalized by the following named condition:

$$\begin{array}{l}\text{If } X, Y \in \mathbb{A}^+,\ \alpha \in \mathbb{A},\ Y\alpha \in \mathbb{O},\ X\alpha \to V, \text{ and } X \Rightarrow Y\\ \text{then } V \in \mathbb{O} \text{ and } \|V\| \supseteq \|Y\alpha\|.\end{array} \tag{CoVal}$$

Theorem 18. *Conditions* (PreObj) *and* (CoVal) *imply* (CoInh).

The conceptual dependence was introduced above as a relation on the set of all words. As soon as non-object words are regarded as "senseless," it is reasonable to describe dependence between objects involving objects only; namely, if a concept X depends on a concept Y, then there should be a chain of concepts (rather than arbitrary words) connecting X with Y. This principle is justified by the following theorem (see also Corollary 20).

Theorem 19. *Assume* (Obj), (PreObj)*, and* (CoInh)*. Given* $X, Y \in \mathbb{O}$*,* X *depends on* Y *if and only if there exist* $X_1, \ldots, X_n \in \mathbb{O}$*,* $n \geqslant 1$*, such that* $X \rightarrowtail X_1 \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail X_n = Y$*.*

Corollary 20. *Assume* (Obj), (PreObj)*, and* (CoInh)*. The restriction of* $\overset{+}{\rightarrowtail}$ *onto* $\mathbb{O}$ *is the least transitive relation on* $\mathbb{O}$ *possessing the following three properties for all* $X, Y \in \mathbb{O}$ *and* $\delta \in \mathbb{A}^+$ *:*

if $X \to Y$ *then* $X \overset{+}{\rightarrowtail} Y$*;*
if $X \to Y$ *and* $\delta \in \|X\| \cap \|Y\|$ *then* $X\delta \overset{+}{\rightarrowtail} Y\delta$*;*
if $\delta \in \|X\|$ *then* $X\delta \overset{+}{\rightarrowtail} X$*.*

The last assertion shows that, with (Obj), (PreObj), and (CoInh) satisfied, the conceptual dependence relation between objects can be described in full conformity with the initial definition of this relation on the set of all words. The only distinction consists in the fact that the latter description does not go beyond the set of objects.

Remark 21. In Theorem 19 and Corollary 20, none of the conditions (Obj), (PreObj), or (CoInh) can be omitted.

3. Algorithmization

The rest of the paper is devoted to the effective verification of various properties of rewriting systems under consideration, and the following theorem is the main step in this direction.

Theorem 22. *Given a system, put* $\mu := \max\{|E| : E \in \mathbb{E}\}$. *A word* X *is infinitely rewritable if and only if one of the following two (mutually exclusive) conditions holds:*

(*a*) *there are integers* $n \geqslant 0$ *and* $r > 0$ *such that* $X^{(n)} = X^{(n+r)}$;

(*b*) *there are integers* $n \geqslant 0$ *and* $r > 0$ *such that*

$$\mu \leqslant \left|X^{(n)}\right| \leqslant \left|X^{(n+1)}\right|, \dots, \left|X^{(n+r)}\right|,$$
$$X^{(n)} \neq X^{(n+r)}, \quad X^{(n)}\restriction_{\mu} = X^{(n+r)}\restriction_{\mu}.$$

In case (*a*) *we have* $X \overset{*}{\Rightarrow} \underbrace{X^{(n)} \Rightarrow \dots \Rightarrow X^{(n+r-1)}}_{\text{period}} \Rightarrow X^{(n)} \Rightarrow \cdots$. *In case* (*b*) *put* $Y = X^{(n)}\restriction_{\mu}$ *and let* $S \in \mathbb{A}^*$ *be such that* $X^{(n)} = YS$. *Then there is a word* $R \in \mathbb{A}^+$ *such that* $Y^{(r)} = YR$ *and the rewriting sequence* $\langle X^{(0)}, X^{(1)}, \dots\rangle$ *contains a subsequence constituted by the words* $X^{(n+mr)} = YR^mS$, $m \geqslant 0$, *each of which starts a regular "growth period" of length* r*:*

$$\begin{aligned}
X \overset{*}{\Rightarrow} X^{(n)} &= YS &&\Rightarrow Y^{(1)}S &&\Rightarrow \cdots \Rightarrow Y^{(r-1)}S\\
\Rightarrow X^{(n+r)} &= YRS &&\Rightarrow Y^{(1)}RS &&\Rightarrow \cdots \Rightarrow Y^{(r-1)}RS\\
\Rightarrow X^{(n+2r)} &= YR^2S &&\Rightarrow Y^{(1)}R^2S &&\Rightarrow \cdots \Rightarrow Y^{(r-1)}R^2S\\
\Rightarrow \cdots &&&&&\\
\Rightarrow X^{(n+mr)} &= YR^mS &&\Rightarrow Y^{(1)}R^mS &&\Rightarrow \cdots \Rightarrow Y^{(r-1)}R^mS\\
\Rightarrow \cdots . &&&&&
\end{aligned}$$

In particular, $\left\{X^{(n)}, X^{(n+1)}, \dots\right\} = \left\{Y^{(j)}R^mS : 0 \leqslant j < r,\ m \geqslant 0\right\}$.

Let $\mathscr{P}$ be an arbitrary set of "constructive entities" (i.e., a set whose elements can be used as inputs for algorithms) and let $C(Y,p)$ be a condition imposed on words $Y \in \mathbb{A}^+$ with additional parameters in $\mathscr{P}$. Formally we may assume that C is a subset of $\mathbb{A}^+ \times \mathscr{P}$ and, for all $Y \in \mathbb{A}^+$, $p \in \mathscr{P}$, the expression $C(Y,p)$ means the containment $\langle Y,p\rangle \in C$.

Given $C(Y,p)$ as above, introduce the condition $C'(Y,R,S,p)$ for $Y,R \in \mathbb{A}^+$, $S \in \mathbb{A}^*$, $p \in \mathscr{P}$ as follows:

$$C'(Y,R,S,p) \text{ if and only if there is an } m \geqslant 1 \text{ such that } C(YR^mS,p).$$

Say that $C(Y,p)$ is *cyclically decidable* if the following two conditions hold:

(a) there is an algorithm verifying $C(Y,p)$ for $Y \in \mathbb{A}^+$, $p \in \mathscr{P}$;

(b) there is an algorithm verifying $C'(Y,R,S,p)$ for $Y,R \in \mathbb{A}^+$, $S \in \mathbb{A}^*$, $p \in \mathscr{P}$.

Note that (a) does not in general imply (b), which fact can be derived from existence of a recursive set $C \subseteq \mathbb{N}^2$ such that the set $\{n \in \mathbb{N} : (\exists\, m \in \mathbb{N})\ \langle m,n\rangle \in C\}$ is not recursive (see, for instance, [2, Chapter C.1, § 6]).

Let $C(Y,p)$ be a cyclically decidable condition. Theorem 22 justifies the following simple algorithm which, given a system, a word $X \in \mathbb{A}^{+}$, and a parameter p, verifies existence of a word $Y \in \mathbb{A}^{+}$ such that $X \overset{*}{\Rightarrow} Y$ and $C(Y,p)$.

Algorithm 23. [Is there a word Y such that $X \overset{*}{\Rightarrow} Y$ and $C(Y,p)$?]

- *If* $C(X,p)$, *return* **Yes**. *If* X *is not rewritable, return* ***No***.
- *Otherwise, subsequently calculate the rewrites* $X^{(1)},\dots,X^{(i)},\dots$ *and, at each step* $i \geqslant 1$, *subsequently analyze the fragments* $\langle X^{(n)}, X^{(n+1)}, \dots, X^{(n+r)}\rangle$ *for* $0 \leqslant n < n+r = i$, *as follows:*
  - ○ *If* $C\big(X^{(n+r)},p\big)$, *return* **Yes**. *If* $X^{(n)} = X^{(n+r)}$, *return* ***No***.
  - ○ *If* $\langle X^{(n)}, \dots, X^{(n+r)}\rangle$ *satisfies condition (b) of Theorem* 22,
    put $Y := X^{(n)}{\restriction}_{\mu}$; *let* $S \in \mathbb{A}^{*}$ *be such that* $X^{(n)} = YS$;
    let $R \in \mathbb{A}^{+}$ *be such that* $Y^{(r)} = YR$ (such an R exists by Theorem 22)*;*
    if $C'(Y,R,S,p)$, *return* **Yes***; otherwise return* ***No***.
  - ○ *If* $X^{(n+r)}$ *is not rewritable, return* ***No***. *Otherwise proceed to the next step,* $i+1$.

By Theorem 22, the above procedure terminates for every input.

As is easily seen, given a system $\mathscr{S}$, the condition $C(Y,\mathscr{S}) =$ "Y is not rewritable within $\mathscr{S}$" is cyclically decidable. Therefore, specialized with this condition, Algorithm 23 verifies finite rewritability of a given word within a given system. A simplified version is presented below.

Algorithm 24. [Is a word X finitely rewritable?] *Start subsequent calculation of the rewrites* $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, ... *If a nonrewritable word* $X^{(i)}$ *occurs, return* **Yes**. *Otherwise, according to Theorem* 22, *a fragment* $\langle X^{(n)}, X^{(n+1)}, \dots, X^{(n+r)}\rangle$ *will occur which satisfies* (a) *or* (b) *of Theorem* 22*; in this case return* ***No***.

Since the set $\mathbb{E}$ of explicit words is finite, Theorem 7 implies that (Fin) *is effectively verifiable*: it suffices to apply Algorithm 24 to all explicit words.

The specialization of Algorithm 23 with the condition $C(Y) =$ "$Y = \omega$" checks *if a given word is an object.* (This can be also verified by a slight modification of Algorithm 24.) It is now clear that (Obj) *and* (PreObj) *are effectively verifiable.*

Note that if (Fin) holds, the containment $X \in \mathbb{O}$ can be trivially verified: just check if the (finite) rewriting sequence of X ends with ω. In addition, if (Obj) holds, we can stop calculating the rewriting sequence of X if $X^{(n)} \in \mathbb{E}$ at some step $n \geqslant 0$; furthermore, if both (Obj) and (PreObj) hold, the calculation can be terminated if some $X^{(n)}$ becomes a prefix of any explicit word (see Proposition 9).

As is easily seen, the condition $C(Y,X) =$ "$Y \sqsupseteq X$" is cyclically decidable. Therefore a properly specialized version of Algorithm 23 checks *if a given word X is recurrent.* By Theorem 5, we conclude that *(Rec) is effectively verifiable*: to check if all words are not recurrent, it suffices to apply the algorithm to all words over $\mathbb{A}_{\mathbb{E}}$ of length at most μ. (However, the resultant verification occurs exponential-time; see Remark 6.)

Another approach to verifying (Rec) can be based on Theorem 8 which states that (Rec) implies (Fin). Check (Fin) first. If it fails then (Rec) also fails. If (Fin) holds true, condition (Rec) can be verified by processing all words X over $\mathbb{A}_{\mathbb{E}}$ of length at most μ and returning **Yes** whenever an X occurs such that $X \sqsubseteq X^{(n)}$ for some $n \geqslant 1$.

By Theorem 3, condition (Con) can be effectively verified by constructing the conceptual scheme and checking (during the construction) if the scheme is acyclic. The algorithm described below checks if a given system is conceptually consistent. If it is so, the algorithm returns the conceptual scheme of the system; otherwise it returns an example of a cycle in the conceptual scheme. The algorithm uses a variable directed graph $\Gamma = \langle \Gamma_{\mathrm{N}}, \Gamma_{\mathrm{A}} \rangle$ (with Γ_{N} the nodes and Γ_{A} the arcs) and a variable $\mathscr{A}$ whose values are finite subsets of $\mathbb{A}^{+} \times \mathbb{A}^{+}$.

Algorithm 25. [Is a system conceptually consistent?]

```
(1) Put $\Gamma_{\mathrm{N}} := \mathbb{E}$, $\Gamma_{\mathrm{A}} := \varnothing$.
(2) Put $\mathscr{A} := \{\langle X, Y \rangle : X$ is a sink of $\Gamma$ and $X \rightarrowtail Y\}$.
(3) If $\mathscr{A} = \varnothing$, claim that the system is conceptually consistent and return $\Gamma$ as
the conceptual scheme.
(4) Otherwise do the following for each pair $\langle X, Y \rangle \in \mathscr{A}$:
 if $X = Y$ or $\Gamma$ contains a path from $Y$ to $X$,
     claim that the system is conceptually inconsistent
     and return a cycle: $X \rightarrowtail X$ or $Y \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail X \rightarrowtail Y$;
 otherwise put $\Gamma_{\mathrm{N}} := \Gamma_{\mathrm{N}} \cup \{Y\}$, $\Gamma_{\mathrm{A}} := \Gamma_{\mathrm{A}} \cup \{\langle X, Y \rangle\}$.
(5) Go to (2).
```

When applied to a conceptually inconsistent system, Algorithm 25 returns an example of a cycle $X_0 \rightarrowtail X_1 \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail X_m = X_0$ in the conceptual scheme, but it is not guaranteed that all words X_i in the cycle are objects (even in case X_0 is an object). On the other hand, Theorem 19 implies that, with (Obj), (PreObj), and (CoInh) satisfied, every path $X_0 \rightarrowtail X_1 \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail X_m$ between objects X_0, X_m can be transformed into a path of *objects* $Y_0 \rightarrowtail Y_1 \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail Y_n$, with $Y_0 = X_0$ and $Y_n = X_m$. We note that such a transformation can be performed *effectively*.

By slightly modifying Algorithm 25, we can obtain a procedure for constructing the weak rewriting scheme rather than the conceptual scheme. The algorithm presented below checks in an arbitrary system if there are weakly recurrent words, and either returns an example of such a word or constructs the weak rewriting scheme of the system.

Algorithm 26. [Is there a weakly recurrent word?]

```
(1) Put $\Gamma_{\mathrm{N}} := \mathbb{E}$, $\Gamma_{\mathrm{A}} := \varnothing$.
(2) Put $\mathscr{A} := \{\langle X, Y \rangle : X$ is a sink of $\Gamma$ and $X \Rightarrow_{\mathrm{w}} Y\}$.
(3) If $\mathscr{A} = \varnothing$, claim that there are no weakly recurrent words and return $\Gamma$ as
the weak rewriting scheme.
(4) Otherwise do the following for each pair $\langle X, Y \rangle \in \mathscr{A}$:
   if $X \sqsubseteq Y$ or $\Gamma$ contains a path from a prefix $Y_0 \sqsubseteq Y$ to $X$,
      return a weakly recurrent word:
      $X \Rightarrow_{\mathrm{w}} Y \sqsupseteq X$   or   $Y_0 \Rightarrow_{\mathrm{w}} \cdots \Rightarrow_{\mathrm{w}} X \Rightarrow_{\mathrm{w}} Y \sqsupseteq Y_0$;
   otherwise put $\Gamma_{\mathrm{N}} := \Gamma_{\mathrm{N}} \cup \{Y\}$, $\Gamma_{\mathrm{A}} := \Gamma_{\mathrm{A}} \cup \{\langle X, Y \rangle\}$.
(5) Go to (2).
```

According to Theorem 3, the weak rewriting scheme of a conceptually inconsistent system includes a path $X_0 \overset{+}{\Rightarrow}_{\mathrm{w}} X_n \sqsupseteq X_0$ with $X_0 \in \mathbb{E}$. Given an inconsistent system, Algorithm 25 returns an example of a path $Y_0 \overset{+}{\Rightarrow}_{\mathrm{w}} Y_n \sqsupseteq Y_0$, but the leading word Y_0 need not be explicit. In this connection it is worth noting that every path of the form $Y_0 \overset{+}{\Rightarrow}_{\mathrm{w}} Y_n \sqsupseteq Y_0$ can be *effectively* transformed into a path $X_0 \overset{+}{\Rightarrow}_{\mathrm{w}} X_n \sqsupseteq X_0$ (of the same length) with $X_0 \in \mathbb{E}$.

To the author's opinion, the most convincing indication of conceptual inconsistency is an example of some cycle $X_0 \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail X_n = X_0$ which is constituted by *objects* and starts with an *explicit* word X_0. We note that, if an inconsistent system satisfies (Obj), (PreObj), and (CoInh), then a cycle of this kind can be found *effectively*.

We now turn to the effective analysis of object types.

Say that $C \in \mathbb{O}$ is a *character* if either $C = \omega$ or $C \sqsubset E$ for some $E \in \mathbb{E}$. Let $\mathbb{C}$ be the set of all characters. It is clear that $\mathbb{C}$ is finite.

Given an object X, consider the rewriting sequence $X^{(0)} \Rightarrow \cdots \Rightarrow X^{(n)} = \omega$ and denote by $\mathrm{ch}(X)$ the first character in the sequence $\langle X^{(0)}, \dots, X^{(n)} \rangle$. Call $\mathrm{ch}(X)$ the *character of* X.

It is clear that $\mathrm{ch}(C) = C$ for all $C \in \mathbb{C}$. Therefore, $\mathbb{C} = \{\mathrm{ch}(X) : X \in \mathbb{O}\}$.

Theorem 27. *For every object* X *we have* $\|X\| = \|\mathrm{ch}(X)\|$. *Consequently,* $\{\|X\| : X \in \mathbb{O}\} = \{\|C\| : C \in \mathbb{C}\}$, *and the set* $\{\|X\| : X \in \mathbb{O}\}$ *is finite.*

By the *type comparison problem* we mean the following: given two objects X and Y, effectively compare the types of X and Y, i.e., determine which of the relations $\|X\| = \|Y\|$, $\|X\| \subseteq \|Y\|$, $\|X\| \supseteq \|Y\|$ hold.

It is clear that the character of an object can be effectively determined. Therefore, due to Theorem 27, the type comparison problem reduces to effective comparison of the character types.

Given $X \in \mathbb{C}$ and $\alpha \in \|X\|_1$, introduce the notation $X_\alpha := \mathrm{ch}(X\alpha)$ and, given an arbitrary function $\tau : \mathbb{C} \to \{1, \dots, N\}$, define the following equivalence relation on $\mathbb{C}$:

$$X \underset{\tau}{\sim} Y \quad \text{if and only if} \quad \|X\|_1 = \|Y\|_1 \text{ and } \tau(X_\alpha) = \tau(Y_\alpha) \text{ for all } \alpha \in \|X\|_1.$$

The following algorithm uses two variable functions $\tau, \tilde{\tau} : \mathbb{C} \to \{1, 2, \dots\}$ (each of which can be encoded as an array of naturals indexed by the characters).

Algorithm 28. [Compute a character typing.]

```
(1) Define $\tau$ by putting $\tau(X) := 1$ for all $X \in \mathbb{C}$.
(2) If $X \underset{\tau}{\sim} Y$ for all $X, Y \in \mathbb{C}$ such that $\tau(X) = \tau(Y)$, return $\tau$.
(3) Assign $\tilde{\tau}$ a copy of $\tau$.
(4) For each $k \in \{\tau(X) : (\exists\, Y \in \mathbb{C})(X \underset{\tau}{\nsim} Y \;\&\; \tau(X) = \tau(Y))\}$ do the following:
    arbitrarily enumerate the set $\{X \in \mathbb{C} : \tau(X) = k\}$ thus making it a sequence
    $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$, $n \geqslant 2$, and, for each $i = 2, \dots, n$, do the following:
        if $X_i \underset{\tau}{\sim} X_j$ for some $1 \leqslant j < i$, reassign $\tilde{\tau}(X_i) := \tilde{\tau}(X_j)$;
        otherwise reassign $\tilde{\tau}(X_i) := \max\{\tilde{\tau}(X) : X \in \mathbb{C}\} + 1$.
(5) Assign $\tau := \tilde{\tau}$ and go to (2).
```

Theorem 29. *Algorithm* 28 *halts for any system and, if the system meets* (PreObj), *the resultant function* $\tau : \mathbb{C} \to \{1, \dots, N\}$ *is such that* $\tau(X) = \tau(Y)$ *if and only if* $\|X\| = \|Y\|$.

Remark 30. Algorithm 28 is analogous to Vizing's algorithm of partitioning the vertex set of a graph into classes of similar vertices (see [3]). The author is grateful to S. V. Avgustinovich for discovering the analogy.

The following algorithm uses two variable sets $\Sigma, \Sigma_0 \subseteq \mathbb{C}^2$.

Algorithm 31. [Compute the character subtyping.]

```
(1) Put $\Sigma := \mathbb{C}^2$.
(2) Put $\Sigma_0 := \{\langle X, Y \rangle \in \Sigma : \|X\|_1 \subseteq \|Y\|_1 \;\&\; (\forall\, \alpha \in \|X\|_1)\, \langle X_\alpha, Y_\alpha \rangle \in \Sigma\}$.
(3) If $\Sigma_0 = \Sigma$, return $\Sigma$. Otherwise reassign $\Sigma := \Sigma_0$ and go to (2).
```

Theorem 32. *Given any system, Algorithm* 31 *always halts and, if the system meets* (PreObj), *the resultant set* Σ *equals* $\{\langle X, Y \rangle \in \mathbb{C}^2 : \|X\| \subseteq \|Y\|\}$.

Therefore, given a system subject to (PreObj), we can effectively verify the relation $\|X\| \subseteq \|Y\|$ for $X, Y \in \mathbb{O}$. (As is easily seen, this implies that *(CoInh) and (CoVal) are effectively verifiable.*) However, the mere claim "$\|X\| \nsubseteq \|Y\|$" is not always sufficient, and one may require a particular reason why the inclusion fails. Within a bulky system, it may occur nontrivial to find a particular detail $\delta \in \|X\| \backslash \|Y\|$, and a corresponding algorithm would thus be a useful troubleshooting tool. Recall that, due to Theorem 27, it suffices to automate the solution for characters only.

The following algorithm uses a variable set $\Delta \subseteq \mathbb{C}^2$ and a variable function $\delta : \Delta \to \mathbb{A}^+$.

Algorithm 33. [Compute a diagnosis for subtyping failure.]

```
(1) Put $\Delta := \varnothing$ and $n := 1$.
(2) For all pairwise distinct $X, Y \in \mathbb{C}$ do the following:
    if there is an $\alpha \in \|X\|_1 \backslash \|Y\|_1$, add $\langle X, Y\rangle$ to $\Delta$ and assign $\delta(X, Y) := \alpha$.
(3) For all pairwise distinct $X, Y \in \mathbb{C}$ such that $\langle X, Y\rangle \notin \Delta$ do the following:
    if there is an $\alpha \in \|X\|_1$ such that $\langle X_\alpha, Y_\alpha\rangle \in \Delta$ and $|\delta(X_\alpha, Y_\alpha)| = n$,
    add $\langle X, Y\rangle$ to $\Delta$ and assign $\delta(X, Y) := \alpha\,\delta(X_\alpha, Y_\alpha)$.
(4) If there were no assignments at step (3), return $\delta$. Otherwise put $n := n + 1$ and go to (3).
```

Theorem 34. *Given any system, Algorithm* 33 *always halts and, if the system meets* (PreObj), *the resultant function* $\delta : \Delta \to \mathbb{A}^+$ *is such that*

$\Delta = \{\langle X, Y\rangle \in \mathbb{C}^2 : \|X\| \nsubseteq \|Y\|\}$,

$\delta(X, Y) \in \|X\| \backslash \|Y\|$ *for all* $\langle X, Y\rangle \in \Delta$,

$|\delta(X, Y)| = \min\{|\delta'| : \delta' \in \|X\| \backslash \|Y\|\}$ *for all* $\langle X, Y\rangle \in \Delta$.

Acknowledgments. The author is grateful to Sergei Vladimirovich Avgustinovich for fruitful discussions.

References

1. *Salomaa A.* Formal Languages.—N. Y.: Academic Press, 1973.—336 p.
2. *Barwise J.* (ed.) Handbook of Mathematical Logic.—Amsterdam: North-Holland, 1977.—1165 p.
3. *Vizing V. G.* Distributive Coloring of Graph Vertices // Diskretn. Anal. Issled. Oper.—1995.—Vol. 2, № 4.—P. 3–12.

Received October 17, 2013.

GUTMAN ALEXANDER EFIMOVICH
Sobolev Institute of Mathematics,
Head of the Laboratory of Functional Analysis
Acad. Koptyug av. 4, 630090, Novosibirsk, Russia;

Novosibirsk State University, *Professor*
Pirogova 2, 630090, Novosibirsk, Russia
E-mail: `gutman@math.nsc.ru`

ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ДАННЫЕ КАК ПЕРЕЗАПИСЫВАЮЩИЕ СИСТЕМЫ

Гутман А. Е.

Рассматриваются перезаписывающие системы, не содержащие пар правил вида $X \to Y$, $X \to Z$, где $Y \neq Z$, в которых перезаписи подлежат только самые длинные префиксы. В рамках таких систем определяются и исследуются аналоги концепций, характерных для систем объектно-ориентированных данных: наследование классов и объектов, экземпляры классов, атрибуты экземпляров и классов, концептуальная зависимость и непротиворечивость, концептуальные схемы, типы, подтипы и др. Особое внимание уделяется эффективной проверке разнообразных свойств рассматриваемых перезаписывающих систем. В частности, приводятся алгоритмы для ответа на следующие вопросы: Все ли слова конечно переписываемы? Существуют ли рекуррентные слова? Является ли система концептуально непротиворечивой? Концептуально зависит ли данное слово X от слова Y? Совпадают ли типы X и Y? Является ли тип X подтипом типа Y?

Ключевые слова: префиксная перезаписывающая система, полутуэвская система, система объектно-ориентированных данных, информационная система, проверка непротиворечивости, онтология модели данных.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 3, С. 36–43

УДК **517.98**

НЕЗАМКНУТЫЕ АРХИМЕДОВЫ КОНУСЫ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. Е. Гутман, Э. Ю. Емельянов, А. В. Матюхин

Семёну Самсоновичу Кутateладзе
в связи с его 70-летием

Формулируется задача об описании класса локально выпуклых пространств, содержащих незамкнутые архимедовы конусы. Излагаются результаты, полученные на пути к решению этой задачи.

Ключевые слова: архимедово упорядоченное векторное пространство, локально выпуклое пространство, слабая топология, конус, клин.

1. Введение

Подмножество K векторного пространства над $\mathbb{R}$ называется *клином*, если $K \neq \varnothing$, $K+K \subset K$ и $\lambda K \subset K$ для всех $0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R}$. *Конусом* называют клин K, удовлетворяющий условию $K \cap (-K) = \{0\}$. Иными словами, клин — это непустое множество, замкнутое относительно линейных комбинаций $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ с положительными коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, а конус — это клин, который может содержать векторы x и $-x$ лишь в случае $x = 0$.

Понятие конуса тесно взаимосвязано с понятием *упорядоченного векторного пространства* — вещественного векторного пространства X, снабженного таким отношением порядка $\leqslant$, что для любых $x, y, z \in X$ и $0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R}$ из $x \leqslant y$ следует $x + z \leqslant y + z$ и $\lambda x \leqslant \lambda y$. А именно, если $(X, \leqslant)$ — упорядоченное векторное пространство, то множество $X^+ := \{x \in X : x \geqslant 0\}$ является конусом; и наоборот: если $K \subset X$ — конус и $x \leqslant_K y \Leftrightarrow y - x \in K$ $(x, y \in X)$, то $(X, \leqslant_K)$ — упорядоченное векторное пространство и $X^+ = K$ (см., например, [1, 3.2; 2]).

Упорядоченное векторное пространство $(X, \leqslant)$ называют *архимедовым* при выполнении следующего условия:

$$\text{если } x, y \in X,\ y \geqslant 0 \text{ и } x \leqslant \tfrac{1}{n} y \text{ для всех } n \in \mathbb{N}, \text{ то } x \leqslant 0.$$

Это условие обеспечивает допустимость перехода к пределу в линейных неравенствах с фиксированными векторами и переменными коэффициентами (см. [2, 1.11–12]). В частности, если пространство X архимедово, $x_1, \dots, x_n \in X^+$, $\lambda_{1m} x_1 + \dots + \lambda_{nm} x_n \geqslant 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$ и для каждого индекса $i \in \{1, \dots, n\}$ существует предел $\lambda_i = \lim\limits_{m\to\infty} \lambda_{im} \in \mathbb{R}$, то $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \geqslant 0$.

Конус $K \subset X$ называют *архимедовым*, если архимедово соответствующее упорядоченное векторное пространство $(X, \leqslant_K)$. Конус заведомо архимедов, если он замкнут в какой-либо векторной топологии. (В этом случае переход к пределу в линейных неравенствах допустим без каких-либо ограничений.) Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: архимедов конус в топологическом векторном пространстве не обязан быть замкнутым. Простым примером незамкнутого архимедова конуса служит множество

$$s^+_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}) = \{x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ : \ (\exists\, m \in \mathbb{N})(\forall\, n \geqslant m)\ x(n) = 0\}$$

в любом из классических банаховых пространств $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Известно, что в хаусдорфовом топологическом векторном пространстве всякий архимедов конус, имеющий непустую внутренность, замкнут (см. [2, 2.4]). Кроме того, архимедовость конуса и его замкнутость равносильны в конечномерном случае (см. 3.1 (f)). До недавнего времени этим наблюдением фактически исчерпывались сведения о классе пространств, в которых существуют незамкнутые архимедовы конусы. На данный момент вопрос об исчерпывающем описании таких пространств по-прежнему открыт. Ниже мы приведем некоторые идеи и результаты, возникшие на пути к решению этой задачи в классе локально выпуклых пространств.

2. Термины и обозначения

Пусть X — вещественное векторное пространство и $S \subset X$. Символом $\operatorname{core} S$ обозначается ядро множества S, а символами $\operatorname{lin} S$, $\operatorname{cone} S$ и $\operatorname{aff} S$ — соответственно линейная, коническая и аффинная оболочки S:

$$\operatorname{core} S = \bigl\{x \in X : \ (\forall\, y \in X)(\exists\, \varepsilon > 0)\ x + [0, \varepsilon] y \subset S\bigr\};$$

$$\operatorname{lin} S = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in S,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\right\} \cup \{0\};$$

$$\operatorname{cone} S = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in S,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+\right\} \cup \{0\};$$

$$\operatorname{aff} S = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in S,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right\}.$$

Заметим, что $\operatorname{cone} S$ — наименьший по включению клин в X, содержащий S.

2.1. *Пусть B — выпуклое подмножество X. Тогда*

(1) $\operatorname{cone} B = \{\lambda x : \ x \in B,\ \lambda > 0\} \cup \{0\}$;

(2) *если A — аффинное подпространство X, $0 \notin A$ и $B \subset A$, то $A \cap \operatorname{cone} B = B$; в частности, если $0 \notin \operatorname{aff} B$, то $\operatorname{aff} B \cap \operatorname{cone} B = B$;*

(3) *если $0 \notin B$, то клин $\operatorname{cone} B$ является конусом.*

Термин «подпространство» по умолчанию означает «векторное подпространство». *Прямыми* и *лучами* называются множества вида $x + \mathbb{R} y$ и $x + \mathbb{R}^+ y$, где $y \neq 0$.

Для произвольного множества I символом $s(I)$ обозначается векторное пространство всех функций $x \colon I \to \mathbb{R}$, а символом $s_{\mathrm{fin}}(I)$ — его векторное подпространство, состоящее из функций $x \in s(I)$ с конечным носителем $\operatorname{supp} x := \{i \in I : x(i) \neq 0\}$. Архимедовы конусы $\{x \in s(I) : \ (\forall\, i \in I)\ x(i) \geqslant 0\}$ и $s^+(I) \cap s_{\mathrm{fin}}(I)$ обозначаются соответствующими символами $s^+(I)$ и $s^+_{\mathrm{fin}}(I)$. Мы также используем сокращения: $\mathbb{S} := s(\mathbb{N})$ и $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}} := s_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$.

Символом $X^{\#}$ обозначается пространство всех линейных функционалов на векторном пространстве X, а символом X' — пространство всех непрерывных линейных функционалов на топологическом векторном пространстве X.

Всякое конечномерное векторное пространство по умолчанию наделяется стандартной (единственной) хаусдорфовой векторной топологией.

Под *локально выпуклым пространством* понимается вещественное векторное пространство, снабженное хаусдорфовой локально выпуклой векторной топологией.

Поскольку в рассматриваемом круге вопросов важная роль отводится сильнейшей локально выпуклой топологии, мы напомним несколько ее эквивалентных описаний (см., например, [1, 3]).

2.2. *Следующие свойства топологии τ на вещественном векторном пространстве X равносильны:*

(a) *τ — сильнейшая локально выпуклая топология на X;*

(b) *множество $U \subset X$ является τ-окрестностью точки $x \in X$ тогда и только тогда, когда $x \in \operatorname{core} C \subset U$ для некоторого выпуклого множества C;*

(c) *τ — локально выпуклая топология, в которой внутренность любого выпуклого множества совпадает с его ядром;*

(d) *τ — локально выпуклая топология, в которой непрерывны все полунормы;*

(e) *τ — такая топология Макки на X, что $(X,\tau)' = X^{\#}$.*

3. Архимедовы множества

Из технических соображений удобно обобщить понятие архимедова конуса на случай произвольных выпуклых множеств. Выпуклое подмножество C вещественного векторного пространства X назовем *архимедовым* при выполнении следующего условия:

$$\text{если } x, y \in X \text{ и } x + \tfrac{1}{n}y \in C \text{ для всех } n \in \mathbb{N}, \text{ то } x \in C.$$

Согласно [2, 1.11] в случае, когда C является конусом, последнее определение равносильно приведенному в § 1.

3.1. *Следующие свойства выпуклого множества $C \subset X$ равносильны:*

(a) *множество C архимедово;*

(b) *для любых $x, y \in X$ и $\varepsilon > 0$ из $x + (0,\varepsilon]\,y \subset C$ следует $x \in C$;*

(c) *$X \setminus C = \operatorname{core}(X \setminus C)$;*

(d) *пересечение C с любой прямой в X замкнуто;*

(e) *пересечение C с любым подпространством X размерности $\leqslant 2$ замкнуто;*

(f) *пересечение C с любым конечномерным подпространством X замкнуто;*

(g) *C секвенциально замкнуто в некоторой хаусдорфовой векторной топологии на X;*

(h) *C секвенциально замкнуто в сильнейшей локально выпуклой топологии на X.*

$\lhd$ Импликации (a)$\Leftarrow$(b)$\Leftarrow$(c)$\Leftarrow$(d)$\Leftarrow$(e)$\Leftarrow$(f)$\Leftarrow$(g)$\Leftarrow$(h) очевидны.

Чтобы показать (a)$\Rightarrow$(f), рассмотрим произвольное конечномерное подпространство $X_0 \subset X$ и положим $C_0 := C \cap X_0$. Можно считать, что $0 \in C_0$. Поскольку в подпространстве $\operatorname{lin} C_0 \subset X_0$ множество C_0 имеет непустую внутренность, к C_0 применимы рассуждения, приведенные в [2, 2.4], из которых следует, что архимедово множество C_0 замкнуто в (конечномерном) подпространстве $\operatorname{lin} C_0$, а значит, и в X.

Покажем, что (f)$\Rightarrow$(h). Пусть τ — сильнейшая локально выпуклая топология на X. Благодаря (f) достаточно показать, что линейная оболочка любой сходящейся в τ последовательности $x_n \to x$ имеет конечную размерность. В противном случае из $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

можно было бы извлечь такую подпоследовательность $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, что $x \notin \operatorname{lin}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, и тогда сходимость $y_n \to x$ в τ противоречила бы наличию непрерывного (см. 2.2 (e)) линейного функционала, равного 0 на $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ и 1 в точке x. $\rhd$

Из 3.1 с очевидностью вытекают следующие свойства архимедовых множеств.

3.2. (1) *Если C — выпуклое подмножество какого-либо векторного подпространства $X_0 \subset X$, то архимедовость C в X_0 равносильна архимедовости C в X.*

(2) *Если X и Y — вещественные векторные пространства, $T\colon X \to Y$ — линейная инъекция, $y \in Y$ и C — архимедово выпуклое подмножество X, то $T(C) + y$ является архимедовым выпуклым подмножеством Y.*

(3) *Всякое аффинное подпространство архимедово.*

(4) *Пересечение любого семейства архимедовых множеств архимедово.*

3.3. *Если множество $E \subset X$ линейно независимо, то $\operatorname{cone} E$ — архимедов конус в X.*

$\lhd$ Достаточно заметить, что стандартный линейный изоморфизм $s_{\mathrm{fin}}(E) \leftrightarrow \operatorname{lin} E$ отображает архимедов конус $s^+_{\mathrm{fin}}(E)$ на $\operatorname{cone} E$, и привлечь 3.2 (1), (2). $\rhd$

3.4. *Пусть B — выпуклое подмножество X, $0 \notin \operatorname{aff} B$. Множество $\operatorname{cone} B$ является архимедовым конусом тогда и только тогда, когда B архимедово и не содержит лучей.*

$\lhd$ *Необходимость.* Из архимедовости множеств $\operatorname{cone} B$ и $\operatorname{aff} B$ (см. 3.2 (3)) вытекает архимедовость их пересечения B (см. 2.1 (2)). Допустим, что B содержит какой-либо луч $x + \mathbb{R}^+ y$, где $y \neq 0$. Тогда $\frac{1}{n}x + y = \frac{1}{n}(x + ny) \in \operatorname{cone} B$ для всех $n \in \mathbb{N}$, откуда в силу архимедовости $\operatorname{cone} B$ следует $y \in \operatorname{cone} B$. Поскольку $y \neq 0$, найдется такое число $\lambda > 0$, что $\lambda y \in B$ (см. 2.1 (1)). Таким образом, $x, \lambda y, x + \lambda y \in B$, а значит, $0 = x + \lambda y - (x + \lambda y) \in \operatorname{aff} B$ вопреки условию.

Достаточность. Согласно 2.1 (3) клин $K := \operatorname{cone} B$ является конусом. Основываясь на 3.1 (f), рассмотрим произвольное конечномерное подпространство $X_0 \subset X$ и покажем, что пересечение $K_0 := K \cap X_0$ замкнуто в X_0. Как легко видеть, $K_0 = \operatorname{cone} B_0$, где $B_0 := B \cap X_0$. Поскольку в конечномерном пространстве X_0 выпуклое множество B_0 архимедово и не содержит лучей, оно замкнуто и ограничено в X_0. Кроме того, $0 \notin B_0$. Из [4, II.3.4] следует, что $K_0 = \operatorname{cone} B_0$ — замкнутый конус в X_0. $\rhd$

4. Незамкнутые архимедовы конусы

Изложение имеющихся на данный момент сведений о незамкнутых архимедовых конусах мы предварим указанием одного из простых способов их построения.

4.1. *Пусть Y — подпространство топологического векторного пространства X, $C \subset Y$ — незамкнутое в Y архимедово выпуклое множество, не содержащее лучей, и $z \in X \setminus Y$. Тогда $\operatorname{cone}(C + z)$ — незамкнутый архимедов конус в X.*

$\lhd$ Положим $A := Y + z$, $B := C + z$. Ясно, что B — архимедово выпуклое множество, не содержащее лучей, причем $\operatorname{aff} B \subset A$ и $0 \notin A$. Следовательно, $\operatorname{cone} B$ — архимедов конус (см. 3.4). Конус $\operatorname{cone} B$ не замкнут в X, поскольку в противном случае пересечение $A \cap \operatorname{cone} B = B$ (см. 2.1 (2)) было бы замкнуто в A, а тогда C было бы замкнуто в Y. $\rhd$

Итак, для того, чтобы построить незамкнутый архимедов конус, достаточно в каком-либо собственном подпространстве найти незамкнутое архимедово выпуклое множество, не содержащее лучей.

Как известно, сильнейшая векторная топология на пространстве $X = s_{\mathrm{fin}}(I)$ не является локально выпуклой в случае несчетного множества I. Это следует, например, из того факта, что множество $V := \left\{x \in X : \sum_{i\in I} \sqrt{|x(i)|} < 1\right\}$ не содержит ни одного выпуклого поглощающего подмножества (см., например, [5, 6.I]). При этом дополнение $X \setminus V$ «архимедово» (например, в смысле условия 3.1 (f)), но не замкнуто ни в одной из локально выпуклых топологий на X. Разумеется, множество $X \setminus V$ не является выпуклым и содержит лучи, но из него удается «вырезать» фрагмент, обладающий всеми нужными нам свойствами.

4.2. Теорема. *В любом локально выпуклом пространстве несчетной размерности существует выпуклое множество, которое не содержит лучей и является архимедовым, но не замкнутым.*

$\vartriangleleft$ Достаточно фиксировать какое-либо несчетное множество I, рассмотреть пространство $X = s_{\mathrm{fin}}(I)$, снабженное произвольной локально выпуклой топологией, и найти в нем такое архимедово выпуклое множество C, не содержащее лучей, что $0 \notin C$ и $0 \in \mathrm{cl}\, C$. Покажем, что требуемыми свойствами обладает множество

$$C := \left\{ x \in s^+_{\mathrm{fin}}(I) : \sum_{i \in I} x(i) \leqslant 1, \ \sum_{i \in I} \sqrt{x(i)} \geqslant 1 \right\}.$$

Как легко видеть, $0 \notin C$, множество C выпукло и не содержит лучей, а архимедовость C вытекает из очевидной замкнутости его пересечений с конечномерными подпространствами вида $\{x \in X : \mathrm{supp}\, x \subset J\}$, где J — конечное подмножество I.

Остается обосновать включение $0 \in \mathrm{cl}\, C$. С этой целью рассмотрим произвольную выпуклую окрестность нуля $U \subset X$ и покажем, что $U \cap C \neq \varnothing$. Для $n \in \mathbb{N}$ положим $I_n := \bigl\{ i \in I : \frac{1}{n}\chi_{\{i\}} \in U \bigr\}$. Поскольку $0 \in \mathrm{core}\, U$, имеет место равенство $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I$. Используя несчетность I, фиксируем какое-либо число $n \in \mathbb{N}$, для которого множество I_n бесконечно, и выберем произвольные попарно различные $i_1, \ldots, i_n \in I_n$. Непосредственная проверка показывает, что выпуклая комбинация $\frac{1}{n}\bigl(\frac{1}{n}\chi_{\{i_1\}} + \cdots + \frac{1}{n}\chi_{\{i_n\}}\bigr)$ элементов $\frac{1}{n}\chi_{\{i_k\}} \in U$ принадлежит как U, так и C. $\vartriangleright$

4.3. Следствие. *В любом локально выпуклом пространстве несчетной размерности существует незамкнутый архимедов конус.*

$\vartriangleleft$ Пусть Y — какое-либо несчетномерное собственное подпространство в рассматриваемом пространстве X. Согласно 4.2 в Y имеется незамкнутое архимедово выпуклое множество C, не содержащее лучей. Выбирая $z \in X \setminus Y$ и используя 4.1, заключаем, что $\mathrm{cone}(C + z)$ — незамкнутый архимедов конус в X. $\vartriangleright$

Таким образом, в несчетномерном случае незамкнутые архимедовы конусы существуют даже в сильнейшей локально выпуклой топологии. С другой стороны, в конечномерных пространствах все архимедовы конусы замкнуты. В счетномерном же случае интересующий нас вопрос оказывается наиболее сложным. На данный момент мы не владеем исчерпывающим описанием топологий, допускающих наличие незамкнутых архимедовых конусов в счетномерном пространстве. Оставшаяся часть заметки посвящена изложению некоторых результатов, полученных на пути к решению этой задачи.

Как известно, во всех топологиях, согласованных с данной двойственностью, замкнутые выпуклые множества одни и те же (см., например, [1, 10.4.9; 3, 8-3.6]). Следовательно, изучаемое нами свойство локально выпуклого пространства X полностью определяется его топологически сопряженным пространством X', а точнее, расположением X' в $X^{\#}$. При этом можно считать, что пространство X снабжено слабой топологией, согласованной с двойственностью между X и X'.

Из сказанного выше ясно, что мы не ограничим общность, перейдя к рассмотрению локально выпуклых пространств вида $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}|Y := \bigl(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}, \sigma(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}|Y)\bigr)$, где $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}} := s_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$, Y —

векторное подпространство $\mathbb{S} := s(\mathbb{N})$, а $\sigma(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,Y)$ — слабая топология на $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}$, наведенная Y посредством двойственности $\langle x\,|\,y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x(n)y(n)$.

Поскольку используемое нами понятие локально выпуклого пространства включает требование хаусдорфовости, уместно сразу описать подпространства $Y \subset \mathbb{S}$, наводящие отделимую топологию $\sigma(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,Y)$.

4.4. *Следующие свойства векторного подпространства $Y \subset \mathbb{S}$ равносильны:*

(a) *слабая топология $\sigma(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,Y)$ хаусдорфова;*

(b) $(\forall\, x \in \mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\backslash\{0\})(\exists\, y \in Y)\ \langle x\,|\,y\rangle \neq 0$;

(c) *Y плотно в $\mathbb{S}$ относительно (тихоновской) топологии поточечной сходимости;*

(d) $(\forall\, n \in \mathbb{N})(\forall\, z \in \mathbb{R}^n)(\exists\, y \in Y)\ y(1) = z(1),\ \dots,\ y(n) = z(n)$;

(e) $(\forall\, n \in \mathbb{N})(\exists\, y \in Y)\ y(1) = \dots = y(n-1) = 0,\ y(n) = 1$.

Пространство Y, обладающее любым из равносильных свойств 4.4 (a)–(e), будем называть *представительным.*

В рамках введенных выше обозначений имеет место равенство $(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,Y)' = \widehat{Y}$, где $\widehat{Y} := \{\widehat{y} : y \in Y\}$ — пространство кет-функционалов $\widehat{y} := \langle\cdot\,|\,y\rangle$ (см. [1, 10.3, 10.4]). Таким образом, с точностью до изоморфизма $z \mapsto \widehat{z}$ между $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}^{\#}$ расположение Y в $\mathbb{S}$ повторяет расположение $(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,Y)'$ в $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}^{\#}$, а интересующий нас вопрос приобретает следующую формулировку.

4.5. Задача. Выяснить, для каких представительных векторных подпространств $Y \subset \mathbb{S}$ в пространстве $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,Y$ существует незамкнутый архимедов конус.

Пространства Y, удовлетворяющие условию задачи 4.5, условимся для краткости называть *тонкими.*

Безусловно, чем меньше пространство Y, тем слабее топология $\sigma(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,Y)$ и тем больше в пространстве $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,Y$ незамкнутых конусов. Следовательно, всякое (представительное) подпространство тонкого пространства также является тонким. В частности, если бы тонким оказалось все пространство $\mathbb{S}$, задача 4.5 была бы тривиальной.

4.6. *Пространство $\mathbb{S}$ не является тонким: в $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,\mathbb{S}$ все архимедовы выпуклые множества замкнуты.*

$\lhd$ Как известно, на $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}$ сильнейшая локально выпуклая топология $\tau(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,\mathbb{S})$ является секвенциальной (см. [3, 12-3.113]). С учетом 3.1 (h) отсюда следует, что все архимедовы выпуклые множества замкнуты в $\tau(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,\mathbb{S})$, а значит, и в $\sigma(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,\mathbb{S})$. $\rhd$

Итак, само пространство $\mathbb{S}$ не является тонким. С другой стороны, как показано ниже, в $\mathbb{S}$ имеются тонкие подпространства.

4.7. *Если в хаусдорфовом топологическом векторном пространстве X существует незамкнутое линейно независимое множество, то в X существует незамкнутый архимедов конус.*

$\lhd$ Используя сформулированные условия, несложно найти линейно независимое множество $E \subset X$ и элемент $x \in X$ такие, что $x \in \operatorname{cl} E \setminus \operatorname{lin} E$. Согласно 3.3 множество $\operatorname{cone} E$ является архимедовым конусом. Этот конус не замкнут, поскольку $x \in \operatorname{cl} E \setminus \operatorname{lin} E \subset \operatorname{cl}\operatorname{cone} E \setminus \operatorname{cone} E$. $\rhd$

Как легко видеть, условию 4.7 удовлетворяет любое бесконечномерное нормированное пространство X. Отсюда, в частности, следует, что примером тонкого пространства служит $\ell^\infty(\mathbb{N})$ (как и любое его представительное подпространство).

Естественно возникающая гипотеза о том, что в $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,Y$ все линейно независимые множества замкнуты лишь в случае $Y = \mathbb{S}$, опровергается следующим нетривиальным классом контрпримеров.

4.8. Теорема. *Пусть* Λ *— произвольное неограниченное подмножество* $\mathbb{R}$. *Тогда в пространстве* $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}} \,|\, \mathrm{lin}\,\Lambda^{\mathbb{N}}$ *все линейно независимые множества замкнуты.*

$\lhd$ Достаточно рассмотреть произвольное линейно независимое множество $E \subset \mathbb{S}_{\mathrm{fin}}$ и показать, что $0 \notin \mathrm{cl}\,E$ в топологии $\sigma(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}} \,|\, \mathrm{lin}\,\Lambda^{\mathbb{N}})$. С этой целью мы построим последовательность $y \in \Lambda^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющую условию $|\langle e \,|\, y\rangle| \geqslant 1$ для всех $e \in E$. Искомые числа $y(n) \in \Lambda$ определим следующей рекурсией по $n \in \mathbb{N}$: если $y(1), \dots, y(n-1) \in \Lambda$ уже определены, выберем $y(n) \in \Lambda$ так, чтобы

$$|y(n)| \geqslant \frac{1}{|e(n)|}\left(1 + \left|\sum_{i=1}^{n-1} e(i)y(i)\right|\right)$$

для всех $e \in E_n$, где $E_n = \{e \in E : e(n) \neq 0,\ (\forall\, i > n)\ e(i) = 0\}$. (Благодаря линейной независимости множество E_n конечно, и поэтому нужное число $y(n)$ существует.) Неравенство $|\langle e \,|\, y\rangle| \geqslant 1$ справедливо для всех $e \in E$, так как при $e \in E_n$ мы имеем

$$|\langle e \,|\, y\rangle| = \left|\sum_{i=1}^{n} e(i)y(i)\right| \geqslant |e(n)y(n)| - \left|\sum_{i=1}^{n-1} e(i)y(i)\right| \geqslant 1$$

и, кроме того, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = E$. $\rhd$

Заметим, что $\mathrm{lin}\,\Lambda^{\mathbb{N}} \neq \mathbb{S}$, например, в случае $\Lambda \subset \mathbb{Q}$. Действительно, $\mathbb{R}$ представляет собой бесконечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$, в то время как образ $\{y(n) : n \in \mathbb{N}\}$ любой последовательности $y \in \mathrm{lin}\,\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ содержится в подпространстве $\mathbb{R}$, имеющем конечную размерность над $\mathbb{Q}$.

Приведенный пример не снимает вопрос о том, все ли пространства, отличные от $\mathbb{S}$, являются тонкими. Тем не менее имеются определенные аргументы в пользу следующего предположения.

4.9. Гипотеза. *Пространство* $\mathrm{lin}\,\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ *не является тонким, т. е. все архимедовы конусы в пространстве* $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}$ *замкнуты относительно слабой топологии* $\sigma(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}} \,|\, \mathrm{lin}\,\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$.

Стоит отметить, что задача кардинально упрощается при замене конусов клиньями. Поскольку всякое векторное подпространство является архимедовым клином, описать счетномерные локально выпуклые пространства, содержащие незамкнутый архимедов клин, не составляет труда: это в точности те пространства X, для которых $X' \neq X^{\#}$. Аналогичная задача для случая конусов оказывается нетривиальной.

Авторы признательны К. В. Сторожуку за плодотворные обсуждения.

Литература

1. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2006.—xii+354 с.
2. *Aliprantis C. D., Tourky R.* Cones and Duality.—Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2007.—296 p.—(Graduate Stud. in Math.; Vol. 84).
3. *Wilansky A.* Modern Methods in Topological Vector Spaces.—N. Y.: McGraw-Hill, 1978.
4. *Вулих Б. З.* Введение в теорию конусов в нормированных пространствах.—Калинин.: Изд-во КГУ, 1977.
5. *Kelley J. L., Namioka I.* Linear Topological Spaces.—N. Y. etc.: Springer-Verlag, 1963.

Статья поступила 8 сентября 2015 г.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
заведующий лабораторией функционального анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4;

Новосибирский государственный университет,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2
E-mail: `gutman@math.nsc.ru`

Емельянов Эдуард Юрьевич
Middle East Technical University,
Department of Mathematics, Professor
TURKEY, 06800, Ankara, Dumlupinar Bulvari, 1
E-mail: `eduard@metu.edu.tr`

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
в.н.с. лаборатории функционального анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
E-mail: `emelanov@math.nsc.ru`

Матюхин Анатолий Вадимович
Новосибирский государственный университет,
студент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2
E-mail: `anatoly.matyukhin@yandex.ru`

NONCLOSED ARCHIMEDEAN CONES IN LOCALLY CONVEX SPACES

Gutman A. E., Emel'yanov E. Yu., and Matyukhin A. V.

The problem is stated of describing the class of locally convex spaces which include nonclosed Archimedean cones. Some results are presented in the course of solving the problem.

Key words: Archimedean ordered vector space, locally convex space, weak topology, cone, wedge.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 3, С. 44–52

УДК **517.98**

ATOMICITY IN INJECTIVE BANACH LATTICES[1]

A. G. Kusraev

To Semën Kutateladze
on occasion of his 70th birthday

This note is aimed to examine a Boolean valued interpretation of the concept of atomic Banach lattice and to give a complete description of the corresponding class of injective Banach lattices.

Mathematics Subject Classification (2010): 46B42, 47B65.

Key words: Injective Banach lattice, atomic Banach lattice, Boolean valued representation, classification.

1. Introduction

The aim of this note is to examine a Boolean valued interpretation of the concept of atomic Banach lattice and to give a complete description of the corresponding class of injective Banach lattices. Some representation and isometric classification results for general injective Banach lattices were announced in [1, 2].

Section 2 collects some needed Boolean valued representation results following [3]. In Section 3 we demonstrate that a Boolean valued interpretation of atomicity yields some "module atomicity" over a certain f-subalgebra of the center. Section 4 deals with Boolean valued Banach lattices of summable families, which turn out to be "building blocks" for general module atomic injective Banach lattices. Section 5 exposes the main results on representation and classification of injective Banach lattices with atomic Boolean valued representation, i. e. those which are atomic with respect to their natural f-module structure.

The needed information on the theory of Banach lattices can be found in [1, 5]. Recall some definitions and notation. A real Banach lattice X is said to be *injective* if, for every Banach lattice Y, every closed vector sublattice $Y_0 \subset Y$, and every positive linear operator $T_0 : Y_0 \to X$ there exists a positive linear extension $T : Y \to X$ of T_0 with $\|T_0\| = \|T\|$; see [5, Definition 3.2.3]. Equivalently, X is an injective Banach lattice if, whenever X is lattice isometrically imbedded into a Banach lattice Y, there exists a positive contractive projection from Y onto X; one more equivalence definition states that each positive operator from X to any Banach lattice admits a norm preserving positive extension to any Banach lattice containing X as a vector sublattice, see [3, Theorem 5.10.6]. This concept was introduced by Lotz [6]; a significant advance towards the structure theory of injectives was made by Cartwright [7] and Haydon [8].

---

[1] The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research, projects № 12-01-00623-a, № 14-01-91339_ННИО-a, and № 15-51-53119_ГФЕН_a.

In what follows X stands for a real Banach lattice. We denote by $\mathbb{P}(X)$ the Boolean algebra of all band projections in X. A crucial role in the theory of injective Banach lattices is played by the concept of M-projection. A band projection π in a Banach lattice X is called an *M-projection* if $\|x\| = \max\{\|\pi x\|, \|\pi^{\perp}x\|\}$ for all $x \in X$, where $\pi^{\perp} := I_X - \pi$. The collection $\mathbb{M}(X)$ of all M-projections in X is a subalgebra of the Boolean algebra $\mathbb{P}(X)$.

Throughout the sequel $\mathbb{B}$ is a complete Boolean algebra with unit $\mathbb{1}$ and zero $\mathbb{O}$, while $\Lambda := \Lambda(\mathbb{B})$ is a Dedekind complete unital AM-space such that $\mathbb{B}$ is isomorphic to $\mathbb{P}(\Lambda)$. The unit of Λ is also denoted by $\mathbb{1}$. A *partition of unity* in $\mathbb{B}$ is a family $(b_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathbb{B}$ such that $\bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi = \mathbb{1}$ and $b_\xi \wedge b_\eta = \mathbb{O}$ whenever $\xi \neq \eta$. We let := denote the assignment by definition, while $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, and $\mathbb{R}$ symbolize the naturals, the rationals, and the reals.

2. Boolean Valued Representation

Boolean valued analysis is an useful tool in studying of injective Banach lattices [9]. We need some Boolean valued representation results as presented in [3] and [25].

Applying the Transfer and Maximum Principles to the ZFC-theorem "There exists a field of reals" we find an element $\mathscr{R} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ for which $[\![\mathscr{R}$ is a field of reals$]\!] = \mathbb{1}$. We call $\mathscr{R}$ the *reals* within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. The following remarkable result due to Gordon [28] tells us that the interpretation of the reals in $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ is a universally complete vector lattice with the Boolean algebra of band projections isomorphic to $\mathbb{B}$.

Theorem 2.1. *Let $\mathscr{R}$ be the reals within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Then $\mathscr{R}{\downarrow}$ (with the descended operations and order) is a universally complete vector lattice with a weak order unit $\mathbb{1} := 1^{\wedge}$. Moreover, there exists a Boolean isomorphism χ of $\mathbb{B}$ onto $\mathbb{P}(\mathscr{R}{\downarrow})$ such that the equivalences*

$$\begin{aligned} \chi(b)x = \chi(b)y &\Longleftrightarrow b \leqslant [\![\, x = y \,]\!], \\ \chi(b)x \leqslant \chi(b)y &\Longleftrightarrow b \leqslant [\![\, x \leqslant y \,]\!] \end{aligned} \tag{$\mathbb{G}$}$$

hold for all $x, y \in \mathscr{R}{\downarrow}$ and $b \in \mathbb{B}$.

$\lhd$ See [3, Theorem 2.2.4] and [25, Theorem 10.3.4]. $\rhd$

Definition 2.2. A *complete Boolean algebra of M-projections* in X is an arbitrary order complete and order closed subalgebra $\mathbb{B} \subset \mathbb{M}(X)$. A Banach lattice X is said to be $\mathbb{B}$-*cyclic* whenever it is a $\mathbb{B}$-cyclic Banach space with respect to a complete Boolean algebra $\mathbb{B}$ of M-projections. If X has the Fatou and Levi properties (see [3, 5.7.2]), then $\mathbb{M}(X)$ itself is an order closed subalgebra of the complete Boolean algebra $\mathbb{P}(X)$.

Definition 2.3. Let $\Lambda = \mathscr{R}{\Downarrow}$ be the bounded part of the universally complete vector lattice $\mathscr{R}{\downarrow}$; i. e., Λ is the order-dense ideal in $\mathscr{R}{\downarrow}$ generated by the weak order unit $\mathbb{1} := 1^{\wedge} \in \mathscr{R}{\downarrow}$. Take a Banach space $\mathscr{X}$ within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ and put $\mathscr{X}{\Downarrow} := \{x \in \mathscr{X}{\downarrow} : |\!|x|\!| \in \Lambda\}$. Equip $\mathscr{X}{\Downarrow}$ with some *mixed norm* by putting $\|x\| := \||\!|x|\!|\|_\infty$ for all $x \in X$, where the order unit norm $\|\cdot\|_\infty$ is defined as $\|\lambda\|_\infty := \inf\{0 < \alpha \in \mathbb{R} : |\lambda| \leqslant \alpha\mathbb{1}\}$ $(\lambda \in \Lambda)$. In this situation, $(\mathscr{X}{\Downarrow}, \|\cdot\|)$ is a Banach space called the *bounded descent* of $\mathscr{X}$. The terms $\mathbb{B}$-isomorphism and $\mathbb{B}$-isometry mean that isomorphism or isometry under consideration commutes with the projections from $\mathbb{B}$, see [3, 5.8.9].

Theorem 2.4. *A bounded descent of a Banach lattice from the model $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ is a $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattice. Conversely, if X is a $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattice, then in the model $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ there exists up to the isometric isomorphism a unique Banach lattice $\mathscr{X}$ whose bounded descent is isometrically $\mathbb{B}$-isomorphic to X. Moreover, $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$ if and only if $[\![$there is no M-projection in $\mathscr{X}$ other than 0 and $\mathscr{X}]\!] = \mathbb{1}$.*

$\lhd$ See [3, Theorem 5.9.1]. $\rhd$

Definition 2.5. The element $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ from Theorem 2.1 is said to be the *Boolean-valued representation of* X.

Theorem 2.6. *Let X be a Banach lattice with the complete Boolean algebra $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$ of M-projections, Λ be a Dedekind complete unital AM-space such that $\mathbb{P}(\Lambda)$ is isomorphic to $\mathbb{B}$. Then the following assertions are equivalent:*

(1) *X is injective.*

(2) *X is lattice $\mathbb{B}$-isometric to the bounded descent of some AL-space from $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.*

(3) *There exists a strictly positive Maharam operator $\Phi : X \to \Lambda$ with the Levi property such that $X = L^1(\Phi)$ and $\|x\| = \|\Phi(|x|)\|_\infty$ for all $x \in X$.*

(4) *There is a Λ-valued additive norm on X such that $(X, |\!\cdot\!|)$ is a Banach–Kantorovich lattice and $\|x\| = \big\| |x| \big\|_\infty$ for all $x \in X$.*

$\lhd$ See [3, Theorem 5.12.5]. $\rhd$

Theorem 2.7. *Suppose that X is a Banach lattice and $\mathscr{X}$ is the completion of the metric space $X^\wedge$ within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Then $[\![\, \mathscr{X}$ is a Banach lattice$]\!] = \mathbb{1}$ and $\mathscr{X}{\Downarrow}$ is lattice $\mathbb{B}$-isometric to $C_\#(Q, X)$ equipped with the norm $\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi(q)\| : q \in \operatorname{dom}(\varphi) \subset Q\}$ $(\varphi \in C_\#(Q, X))$.*

$\lhd$ The proof is a due modification of [25, 11.3.8]. $\rhd$

3. Boolean Valued Atomicity

In this section we present Boolean valued interpretation of atomicity.

Definition 3.1. A positive element x of a $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattice X is said to be $\mathbb{B}$-*indecomposable* or a $\mathbb{B}$-*atom* if for any pair of disjoint elements $y, z \in X_+$ with $y + z \leqslant x$ there exists a projection $\pi \in \mathbb{B}$ such that $\pi y = 0$ and $\pi^\perp z = 0$, while X is called $\mathbb{B}$-*atomic* if the only element of X disjoint from every $\mathbb{B}$-atom is the zero element.

Denote by $\mathrm{at}(\mathscr{X})$ and $\mathbb{B}\text{-at}(X)$ the sets of atoms in $\mathscr{X}$ and $\mathbb{B}$-atoms in X, respectively. Let $\mathrm{at}_1(\mathscr{X}) := \{x \in \mathrm{at}(\mathscr{X}) : \|x\| = 1\}$, while $\mathbb{B}\text{-at}_1(X)$ consists of all $x \in \mathbb{B}\text{-at}(X)$ with $\|\pi x\| = 1$ for all $\pi \in \mathbb{B}$. It is easy to see that $\mathbb{B}\text{-at}_1(X) = \{x \in \mathbb{B}\text{-at}(X) : |x| = \mathbb{1}\}$.

Proposition 3.2. *Let X be a $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattice identified with the bounded descent $\mathscr{X}{\Downarrow}$ of a Banach lattice $\mathscr{X}$, its Boolean valued representation $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Then the following assertions hold:*

(1) $\mathbb{B}\text{-at}(X) = \mathrm{at}(\mathscr{X}){\Downarrow}$.

(2) $\mathbb{B}\text{-at}_1(X) = \mathrm{at}_1(\mathscr{X}){\Downarrow}$.

(3) *X is $\mathbb{B}$-atomic if and only if $[\![\mathscr{X}$ is atomic$]\!] = \mathbb{1}$.*

$\lhd$ (1) Observe that $x \in \mathrm{at}(\mathscr{X})$ if and only if $x \in \mathscr{X}_+$ and for any two positive disjoint elements $x_1, x_2 \in \mathscr{X}$ with $x_1 + x_2 \leqslant x$ we have $x_1 = 0$ or $x_2 = 0$. Now, given $x \in \mathrm{at}(\mathscr{X}){\Downarrow}$ with $y + z \leqslant x$ for some disjoint $y, z \in X_+$, we put $b := [\![y = 0]\!]$ and $\pi := \chi(b)$. Since $[\![y \neq 0 \to z = 0]\!] = \mathbb{1}$, we have $[\![y \neq 0]\!] \leqslant [\![z = 0]\!]$ and thus $b^* = [\![y \neq 0]\!] \leqslant [\![z = 0]\!]$. By ($\mathbb{G}$) we have $\pi y = 0$ and $\pi^\perp z = \chi(b^*) z = 0$. Thus, $\mathrm{at}(\mathscr{X}){\Downarrow} \subset \mathbb{B}\text{-at}(X)$ and for the converse inclusion the argument is similar.

(2) Taking into account the representation $\mathbb{B}\text{-at}_1(X) = \{x \in \mathbb{B}\text{-at}(X) : |x| = \mathbb{1}\}$ the claim follows easily from the following chain of equivalences:

$$x \in \mathrm{at}_1(\mathscr{X}){\Downarrow} \iff [\![x \in \mathrm{at}_1(\mathscr{X})]\!] = \mathbb{1} \iff [\![x \in \mathrm{at}(\mathscr{X})]\!] = [\![\|x\|_{\mathscr{X}} = 1]\!] = \mathbb{1}$$
$$\iff x \in \mathbb{B}\text{-}\mathrm{at}(\mathscr{X}) \ \wedge\ |x| = \mathbb{1} \iff x \in \mathbb{B}\text{-}\mathrm{at}_1(X).$$

(3) Let for a while $\perp$, $\perp\!\!\!\perp$, and $\perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp$ stand for disjoint complements in $\mathscr{X}$, $X = \mathscr{X}{\Downarrow}$, and $\mathscr{X}{\downarrow}$, respectively. The third claim is immediate from the first one, since the disjoint complement and the descent commute: $(A^{\perp}){\downarrow} = (A{\downarrow})^{\perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp}$, see [3, 1.5.3]. Indeed,

$$(A^{\perp}){\Downarrow} = (A^{\perp}){\downarrow} \cap X = (A{\downarrow})^{\perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp} \cap X = (A{\downarrow} \cap X)^{\perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp} \cap X = (A{\Downarrow})^{\perp\!\!\!\perp},$$

hence putting $A := \mathrm{at}(\mathscr{X})$ and making use of (1) we deduce that $\mathrm{at}(\mathscr{X})^{\perp} = \{0\}$ within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ if and only if $(\mathbb{B}\text{-at}(X))^{\perp\!\!\!\perp} = \{0\}$. $\rhd$

Corollary 3.3. *Let* $\mathbb{B}$, X, *and* $\mathscr{X}$ *be the same as in Proposition* 3.2 *and* $\Lambda = \Lambda(\mathbb{B})$. *Then the following assertions hold:*

(1) $x \in X_+$ *is a* $\mathbb{B}$*-atom if and only if for each* $0 \leqslant y \leqslant x$ *there exists* $\lambda \in \Lambda_+$ *with* $y = \lambda x$.

(2) *If* x *and* y *are* $\mathbb{B}$*-atoms in* X_+ *then there exist a pair of disjoint projections* $\pi, \rho \in \mathbb{B}$ *such that* $\pi x \perp \pi y$, $\rho x = \lambda u$ *and* $\rho y = \mu u$ *for some* $\mu, \lambda \in \Lambda_+$ *and* $u = x + y$.

$\lhd$ Interpreting in the model $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ the well-known claims corresponding to that particular case when $\mathbb{B} = \{0, I_X\}$ (see [13, Theorem 26.4.]) and using Proposition 3.2 yields the required properties. $\rhd$

Definition 3.4. Given a cardinal γ, say that a $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattice X is *purely* $(\mathbb{B}, \gamma)$*-atomic* if $X = \mathscr{D}_0^{\perp\perp}$ for some subset $\mathscr{D}_0 \subset \mathbb{B}\text{-at}_1(X)$ of cardinality γ and for every nonzero projection $\pi \in \mathbb{B}$ and every subset $\mathscr{D} \subset \mathbb{B}\text{-at}_1(\pi X)$ with $\pi X = \mathscr{D}^{\perp\perp}$ we have $\mathrm{card}(\mathscr{D}) \geqslant \gamma$. Evidently, X is purely $(\{0, I_X\}, \gamma)$-atomic if and only if X is atomic and the cardinality of $\mathrm{at}_1(X)$ is γ or, equivalently, X is atomic and the cardinality of the set of atoms in $\mathbb{B}(X)$ equals γ. In this case we say also that X is γ*-atomic.*

Proposition 3.5. *A* $\mathbb{B}$*-cyclic Banach lattice* X *is purely* $(\mathbb{B}, \gamma)$*-atomic for some cardinal* γ *if and only if* $[\![\, \gamma^{\wedge}$ *is a cardinal and* $\mathscr{X}$ *is* $\gamma^{\wedge}$*-atomic* $]\!] = \mathbb{1}$.

$\lhd$ *Sufficiency.* Assume that $\gamma^{\wedge}$ is a cardinal and $\mathscr{X}$ is $\gamma^{\wedge}$-atomic within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. The latter means that $\mathscr{X}$ is atomic and $\mathrm{card}(\mathrm{at}_1(\mathscr{X})) = \gamma^{\wedge}$ within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. If $\Delta := \mathrm{at}_1(\mathscr{X})$ then there exists $\phi \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ such that $[\![\phi : \gamma^{\wedge} \to \Delta \text{ is a bijection}]\!] = \mathbb{1}$. Note that $\phi\underline{\downarrow}$ embeds γ into $\Delta{\downarrow}$ by [3, 1.5.8] and $\Delta{\downarrow} = \mathbb{B}\text{-at}_1(X)$ by Proposition 3.1. It follows that the set $\mathscr{D} := \phi\underline{\downarrow}(\gamma)$ of cardinality γ is contained in $\mathbb{B}\text{-at}_1(X)$ and $X = \mathscr{D}^{\perp\perp}$, since $\Delta = \mathscr{D}{\uparrow}$ and $\mathscr{X} = \Delta^{\perp\perp}$. Take $b \in \mathbb{B}$ and a set $\mathscr{D}'$ of cardinality β which is contained in $\mathbb{B}\text{-at}_1(X)$ and generates bX, i. e. $bX = (\mathscr{D}')^{\perp\perp}$. Then $\mathscr{D}'{\uparrow}$ is of cardinality $\mathrm{card}(\beta^{\wedge})$ and $\mathscr{X} = (\mathscr{D}'{\uparrow})^{\perp\perp}$ within the relative universe $\mathbb{V}^{([\mathbb{O}, b])}$. By [3, 1.3.7] $[\![\gamma^{\wedge} = \mathrm{card}(\gamma^{\wedge}) \leqslant \mathrm{card}(\beta^{\wedge}) \leqslant \beta^{\wedge}]\!] = \mathbb{1}$ and so $\gamma \leqslant \beta$.

Necessity. Assume now that X is purely $(\mathbb{B}, \gamma)$-atomic and $X = \mathscr{D}^{\perp\perp}$ for some $\mathscr{D} \subset \mathbb{B}\text{-at}_1(X)$ of cardinality γ. Then within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ we have $\Delta := \mathscr{D}{\uparrow} \subset \mathrm{at}_1(\mathscr{X})$, $\mathscr{X} = \Delta^{\perp\perp}$ and and the cardinalities of Δ and $\gamma^{\wedge}$ coincide, i. e. $\mathrm{card}(\Delta) = \mathrm{card}(\gamma^{\wedge})$. By [3, 1.9.11] the cardinal $\mathrm{card}(\gamma^{\wedge})$ has the representation $\mathrm{card}(\gamma^{\wedge}) = \mathrm{mix}_{\alpha \leqslant \gamma} b_{\alpha} \alpha^{\wedge}$, where $(b_{\alpha})_{\alpha \leqslant \gamma}$ is a partition of unity in $\mathbb{B}$. It follows that $b_{\alpha} \leqslant [\![\Delta^{\perp\perp} = X$ and Δ is of cardinality $\alpha^{\wedge}]\!] = \mathbb{1}$. If $b_{\alpha} \neq \mathbb{O}$ then $(b_{\alpha} \wedge \Delta)^{\perp\perp} = b_{\alpha} \wedge \mathscr{X}$ and $b_{\alpha} \wedge \Delta$ is of cardinality $\mathrm{card}(\gamma^{\wedge}) = \alpha^{\wedge} \leqslant \gamma^{\wedge}$ in the relative universe $\mathbb{V}^{[\mathbb{O}, b_{\alpha}]}$. (Concerning $b_{\alpha} \wedge \Delta$ and $b_{\alpha} \wedge \mathscr{X}$ and their properties see [3, 1.3.7].) It is easy that $b_{\alpha} \wedge \Delta = (b_{\alpha}\mathscr{D}){\uparrow}$ and so $(b_{\alpha}\mathscr{D})^{\perp\perp} = bX$. By hypothesis X is purely $(\mathbb{B}, \gamma)$-atomic, consequently, $\alpha \geqslant \mathrm{card}(b_{\alpha}\mathscr{D}) \geqslant \gamma$, so that $\alpha = \gamma$, since $\alpha \leqslant \gamma$ if and only if $\alpha^{\wedge} \leqslant \gamma^{\wedge}$. Thus, $\mathrm{card}(\gamma^{\wedge}) = \gamma^{\wedge}$ whenever $b_{\alpha} \neq \mathbb{O}$ and $\gamma^{\wedge}$ is a cardinal within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. $\rhd$

Definition 3.6. Let γ is a cardinal. A complete Boolean algebra $\mathbb{B}$ (as well as its Stone representation space) is said to be γ*-stable* whenever $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \gamma^{\wedge} = \mathrm{card}(\gamma^{\wedge})$, i. e. $[\![\gamma^{\wedge}$ is a cardinal $]\!] = \mathbb{1}$. An element $b \in \mathbb{B}$ is called γ*-stable* if the relative Boolean algebra $[\mathbb{O}, b]$ is γ-stable, see [25, Definition 12.3.7]. Finally, say that a partition of unity $(\pi_{\gamma})_{\gamma \in \Gamma}$ in $\mathbb{B}$ with Γ a set of cardinals is *stable* if π_{γ} is γ-stable for all $\gamma \in \Gamma$.

Theorem 3.7. *Let X be a $\mathbb{B}$-atomic $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattice. There exist a set of cardinals Γ and a partition of unity $(\pi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ such that $\mathbb{B}_\gamma := [\mathbb{O}, \pi_\gamma]$ is γ-stable and $\pi_\gamma X$ is purely $(\mathbb{B}_\gamma, \gamma)$-atomic for all $\gamma \in \Gamma$.*

$\lhd$ If a $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattice X is $\mathbb{B}$-atomic then its Boolean valued representation $\mathscr{X}$ is atomic within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ according to Proposition 3.1. Denote $\gamma_0 := \mathrm{card}(\mathrm{at}_1(\mathscr{X}))$. By [3, 1.9.11] γ_0 is a mixture of some set of relatively standard cardinals. More precisely, there are nonempty set of cardinals Γ and a partition of unity $(b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ in $\mathbb{B}$ such that $x = \mathrm{mix}_{\gamma\in\Gamma}\, b_\gamma \gamma^\wedge$ and $\mathbb{V}^{(\mathbb{B}_\gamma)} \models \gamma^\wedge = \mathrm{card}(\gamma^\wedge)$ with $\mathbb{B}_\gamma := [\mathbb{O}, b_\gamma]$ for all $\gamma \in \Gamma$. It follows that $b_\gamma \wedge \mathscr{X}$ is atomic Banach lattice and $\gamma^\wedge = \mathrm{card}(\mathrm{at}_1(b_\gamma \wedge \mathscr{X}))$ within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B}_\gamma)}$. It remains to apply Proposition 3.5. $\rhd$

4. The Banach Lattices $l^1(\Gamma, \Lambda)$ and $C_\#(Q, l^1(\Gamma))$

We now consider some special injective Banach lattices that are building blocks for the class of all $\mathbb{B}$-atomic injective Banach lattices. Recall that $\Lambda = \Lambda(\mathbb{B})$.

Given a non-empty set Γ, denote by $l^1(\Gamma^\wedge) \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ the internal Banach lattice of all summable families $x := (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma^\wedge}$ in $\mathscr{R}$ with the norm $\|x\|_1 := \sum_{\gamma\in\Gamma^\wedge} |x_\gamma|$.

Let $l^1(\Gamma, \Lambda)$ stand for the vector space of all order summable families in Λ, i.e.

$$l^1(\Gamma,\Lambda) := \Big\{ \mathbf{x} : \Gamma \to \Lambda : \ \boldsymbol{|}\mathbf{x}\boldsymbol{|}_1 := o\text{-}\sum\nolimits_{\gamma\in\Gamma} |\mathbf{x}(\gamma)| \in \Lambda \Big\}.$$

The order on $l^1(\Gamma, \Lambda)$ is defined by letting $\mathbf{x} \leqslant \mathbf{y}$ if and only if $\mathbf{x}(\gamma) \leqslant \mathbf{y}(\gamma)$ for all $\gamma \in \Gamma$. Evidently, $l^1(\Gamma, \Lambda)$ is an order ideal of the Dedekind complete vector lattice Λ^Γ, hence so is $l^1(\Gamma, \Lambda)$. Moreover, $l^1(\Gamma, \Lambda)$ equipped with the norm $\|\mathbf{x}\| := \|\boldsymbol{|}\mathbf{x}\boldsymbol{|}_1\|_\infty$ ($\mathbf{x} \in l^1(\Gamma, \Lambda)$) is a $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattice, since $\mathbb{B} = \mathbb{B}(\Lambda)$.

Proposition 4.1. *$l^1(\Gamma^\wedge)$ is a Boolean valued representation of $l^1(\Gamma, \Lambda)$ and thus $l^1(\Gamma, \Lambda)$ and $l^1(\Gamma^\wedge){\Downarrow}$ are lattice $\mathbb{B}$-isometric.*

$\lhd$ Straightforward verification shows that $l^1(\Gamma, \Lambda)$ is a Banach f-module over Λ, see [3, Definitions 2.11.1 and 5.7.1]. The modified ascent mapping $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}{\Uparrow}$ is a bijection from $(\mathscr{R}{\downarrow})^\Gamma$ onto $(\mathscr{R}^{\Gamma^\wedge}){\downarrow}$, see [3, 1.5.9]. It follows from [3, 2.4.7] that $\boldsymbol{|}\cdot\boldsymbol{|}_1$ is the bounded descent of $\|\cdot\|_1$ and hence $\mathbf{x} \in l^1(\Gamma, \Lambda)$ if and only if $[\![\mathbf{x}{\Uparrow} \in l^1(\Gamma^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$. Moreover, in this event $[\![\,\boldsymbol{|}\mathbf{x}\boldsymbol{|}_1 = \|\mathbf{x}{\Uparrow}\|_1]\!] = \mathbb{1}$ so that the modified descent induces an isometric bijection between $l^1(\Gamma, \Lambda)$ and $(l^1\Gamma^\wedge){\Downarrow}$. Making use of the definition of modified descent it can be easily checked that this bijection is Λ-linear and order preserving. $\rhd$

Proposition 4.2. *The Banach lattice $l^1(\Gamma, \Lambda)$ is $\mathbb{B}$-atomic and injective with $\mathbb{M}(X)$ isomorphic to $\mathbb{B}$. Moreover, $l^1(\Gamma, \Lambda)$ is purely $(\mathbb{B}, \gamma)$-atomic if and only if $[\![\gamma^\wedge = \mathrm{card}(\Gamma^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$.*

$\lhd$ By Theorem 2.6 (2) and Propositions 3.2 and 4.1 X is injective with $\mathbb{M}(X) \simeq \mathbb{B}$ and $\mathbb{B}$-atomic. The second part follows from Propositions 3.5 and 4.1, since $l^1(\Gamma^\wedge)$ is $\mathrm{card}(\Gamma^\wedge)$-atomic within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. $\rhd$

Proposition 4.3. *The norm completion of $\mathbb{R}^\wedge$-normed space $l^1(\Gamma)^\wedge$ within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ is a Banach lattice which is lattice isometric to the internal Banach lattice $l^1(\Gamma^\wedge)$.*

$\lhd$ Denote by $\mathscr{L}_1$ the completion of $l^1(\Gamma)^\wedge$ inside $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Let A be the set of all norm-one atoms in $l^1(\Gamma)$ which is of course bijective with Γ. Then $A^\wedge$ and $\Gamma^\wedge$ are also bijective and $A^\wedge$ can be considered as the set of all norm-one atoms in $l^1(\Gamma^\wedge)$. Denote by $\mathbb{Q}$-$\mathrm{lin}(A)$ the set of all linear combinations of the members of A with rational coefficients. Then by [12, 8.4.10] we have $(\mathbb{Q}\text{-}\mathrm{lin}(A))^\wedge = \mathbb{Q}^\wedge\text{-}\mathrm{lin}(A^\wedge)$. Clearly, $\mathbb{Q}^\wedge$-$\mathrm{lin}(A^\wedge)$ is a dense sublattice in $l^1(\Gamma^\wedge)$, while $(\mathbb{Q}\text{-lin}(A))^\wedge$ is a dense sublattice in $l^1(\Gamma)^\wedge$ and thus in $\mathscr{L}_1$, since $\mathbb{Q}$-lin(A) is dense in $l^1(\Gamma)$. Moreover, the norms induced in $(\mathbb{Q}\text{-lin}(A))^\wedge$ by $l^1(\Gamma^\wedge)$ and $l^1(\Gamma)^\wedge$ coincide. Indeed, if $x \in (\mathbb{Q}\text{-lin}(A))^\wedge$ is of the form $\sum_{k\in n} r(k)\,u(k)$ whith $n \in \mathbb{N}$, $r : n \to \mathbb{Q}$, and $u : n \to A$, then $r^\wedge : n^\wedge \to \mathbb{Q}^\wedge$, $u^\wedge : n^\wedge \to A^\wedge$ and $x^\wedge = \sum_{k\in n^\wedge} r^\wedge(k)u^\wedge(k)$; therefore,

$$\|x\|_{l^1(\Gamma)^\wedge} = \|x\|^\wedge = \Big(\sum\nolimits_{k\in n} |r(k)|\Big)^\wedge = \sum\nolimits_{k\in n^\wedge} |r^\wedge(k)| = \|x\|_{l^1(\Gamma^\wedge)}.$$

It follows that $\mathscr{L}_1$ and $l^1(\Gamma^\wedge)$ are lattice isometric. $\rhd$

Corollary 4.4. *Let Q be the Stone representation space of $\mathbb{B} = \mathbb{P}(\Lambda)$. Then the injective Banach lattices $l^1(\Gamma, \Lambda)$ and $C_\#(Q, l^1(\Gamma))$ are lattice $\mathbb{B}$-isometric.*

$\lhd$ This is immediate from Theorem 2.7 and Proposition 4.3. $\rhd$

Corollary 4.5. *Given an arbitrary infinite cardinals γ_1 and γ_2, we may find a Boolean algebra $\mathbb{B}$ such that the injective Banach lattices $l^1(\gamma_1, \Lambda)$ and $l^1(\gamma_2, \Lambda)$ are lattice $\mathbb{B}$-isometric provided that $\Lambda = \Lambda(\mathbb{B})$. If Q is the Stone representation space of $\mathbb{B}$ then the injective Banach lattices $C_\#(Q,\ l^1(\gamma_1)$ and $C_\#(Q, l^1(\gamma_2))$ are also lattice $\mathbb{B}$-isometric.*

$\lhd$ The claim follows from Proposition 4.3 and Corollary 4.4 making use of the *cardinal collapsing* phenomena: There exists a complete Boolean algebra $\mathbb{B}$ such that the ordinals $\gamma_1^\wedge$ and $\gamma_2^\wedge$ have the same cardinality within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, see [3, 1.13.9]. $\rhd$

Definition 4.6. A $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattice X is called $\mathbb{B}$-*separable,* if there is a sequence $(x_n) \subset X$ such that the norm closed $\mathbb{B}$-cyclic subspace, generated by the set $\{bx_n : n \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{B}\}$, coincides with X. In more detail, X is called $\mathbb{B}$-separable whenever for every $x \in X$ and $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ there exist an element $x_\varepsilon \in X$ and a partition of unity $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{B}$ such that $\|x - x_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$ and $\pi_n x = \pi_n x_n$ for all $n \in \mathbb{N}$. It can be easily seen that X is $\mathbb{B}$-separable if and only if its Boolean valued representation is separable within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Denote by ω the countable cardinal and put $l^1 := l^1(\omega)$.

Corollary 4.7. *For every infinite cardinal γ, there exists a Stonean space Q such that the injective Banach lattice $C_\#(Q, l^1(\gamma))$ is $\mathbb{B}$-separable, with $\mathbb{B}$ standing for the Boolean algebra of the characteristic functions of clopen subsets of Q.*

$\lhd$ Apply Corollary 4.5 with $\gamma_1 := \gamma$ and $\gamma_2 := \omega$, where ω is the countable cardinal. It follows that $C_\#(Q,\ l^1(\gamma)$ and $C_\#(Q, l^1(\omega))$ are lattice $\mathbb{B}$-isometric. Moreover, $[\![l^1(\omega^\wedge)$ is separable$]\!] = \mathbb{1}$ by transfer principle. Taking into account Proposition 4.1 it remains to observe that $[\![\mathscr{X}$ is separable$]\!] = \mathbb{1}$ if and only if $\mathscr{X}{\Downarrow}$ is $\mathbb{B}$-separable. $\rhd$

5. The Main Results

Now we are able to state and prove the main representation and classification results for $\mathbb{B}$-atomic injective Banach spaces.

Definition 5.1. Let X be an injective Banach lattice. Say that X is *centrally atomic* if X is $\mathbb{B}$-atomic with $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$. According to corollary 3.3 this amounts to saying that there is no nonzero element in X disjoint from all Λ-atom, while a Λ-*atom* is any element $x \in X_+$ such that the principal ideal generated by x is equal to $\Lambda x := \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}$. Given a family of Banach lattices $(X_\gamma, \|\cdot\|_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, denote by $\big(\sum^{\oplus}_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma X\big)_{l^\infty}$ the l^∞-*sum,* the Banach lattice of all families $\mathbf{x} := \big(\mathbf{x}(\gamma)\big)_{\gamma\in\Gamma}$ with $\mathbf{x}(\gamma) \in X_\gamma$ for all $\gamma \in \Gamma$ and $\|\mathbf{x}\| := \sup\{\|\mathbf{x}(\gamma)\|_\gamma : \gamma \in \Gamma\} < \infty$.

Lemma 5.2. *For a centrally atomic injective Banach lattice X there exist a set of cardinals Γ and a stable partition of unity $(\pi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ in $\mathbb{M}(X)$ such that $\pi_\gamma X$ is purely $(\gamma, \mathbb{B}_\gamma)$-atomic with $\mathbb{B}_\gamma := [\mathbb{O}, \pi_\gamma]$ for all $\gamma \in \Gamma$ and injective and the representation holds:*

$$X \simeq_{\mathbb{B}} \Big(\sum\nolimits^{\oplus}_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma X\Big)_{l^\infty}.$$

$\lhd$ This is immediate from Proposition 3.7. $\rhd$

Lemma 5.3. *Suppose that the injective Banach lattices $C_{\#}(Q, l^1(\gamma))$ and $C_{\#}(Q, l^1(\delta))$ are lattice $\mathbb{B}$-isometric, where Q is the Stone space of $\mathbb{B}$, while γ and δ are infinite cardinals. If $\mathbb{B}$ is γ-stable and δ-stable then $\gamma = \delta$.*

$\lhd$ If $C_{\#}(Q, l^1(\Gamma))$ and $C_{\#}(Q, l^1(\Delta))$ are lattice $\mathbb{B}$-isometric then $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models$"$l^1(\gamma^\wedge)$ and $l^1(\delta^\wedge)$ are lattice isometric" and thus $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \operatorname{card}(\gamma^\wedge) = \operatorname{card}(\delta^\wedge)$. It remains to observe that $\mathbb{B}$ is γ-stable (δ-stable) if and only if $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \operatorname{card}(\gamma^\wedge) = \gamma^\wedge$ (respectively $\operatorname{card}(\delta^\wedge) = \delta^\wedge$). $\rhd$

Theorem 5.4. *Let X be a centrally atomic injective Banach lattice. Then there is a set of cardinals Γ and a stable partition of unity $(\pi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ in $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$ such that the following lattice $\mathbb{B}$-isometry holds:*

$$X \simeq_{\mathbb{B}} \Big(\sum\nolimits_{\gamma\in\Gamma}^{\oplus} l^1\big(\gamma, \Lambda_\gamma\big)\Big)_{l^\infty},$$

where $\Lambda_\gamma = \pi_\gamma \Lambda$ $(\gamma \in \Gamma)$. If a partition of unity $(\rho_\delta)_{\delta\in\Delta}$ in $\mathbb{B}$ satisfies the same conditions as $(\pi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, then $\Gamma = \Delta$, and $\pi_\gamma = \rho_\gamma$ for all $\gamma \in \Gamma$.

$\lhd$ The required representation follows from Proposition 4.2 and Lemma 5.2.

Assume now that a partition of unity $(\rho_\delta)_{\delta\in\Delta}$ in $\mathbb{B}$ satisfies the same conditions as $(\pi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. Fix $\delta \in \Delta$ and put $\sigma_{\gamma\delta} := \pi_\gamma\rho_\delta$ for arbitrary $\gamma \in \Gamma$. If $\sigma_{\gamma\delta} \neq 0$, then the injective Banach lattices $l^1(\gamma, \sigma_{\gamma\delta}\Lambda)$ and $l^1(\delta, \sigma_{\gamma\delta}\Lambda)$ are lattice $[\mathbb{O}, \sigma_{\delta\gamma}]$-isometric to the same band $\sigma_{\delta\gamma}X$. By Lemma 5.3 $\gamma = \delta$ and thus $\Delta \subset \Gamma$ and $\rho_\delta \leqslant \pi_\gamma$ for all $\delta \in \Delta$. Similarly, $\Gamma \subset \Delta$ and $\rho_\delta \geqslant \pi_\gamma$ for all $\gamma \in \Gamma$. $\rhd$

Remark 5.5. Let Q be the Stone representation space of $\mathbb{B}$. Corollary 4.4 enables us to replace $l^1\big(\gamma, \Lambda_\gamma\big)$ by $C_{\#}(Q_\gamma, l^1(\gamma))$ in Theorem 5.4 with a stable partition of unity $(Q_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ in he Boolean algebra of clopen subsets of Q. Moreover, if some partition of unity $(P_\delta)_{\delta\in\Delta}$ satisfies the same conditions, then $\Gamma = \Delta$, and $P_\gamma = Q_\gamma$ for all $\gamma \in \Gamma$.

Corollary 5.6. *Let X be an injective Banach lattice and Q the Stone representation space of $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$. If X is $\mathbb{B}$-separable, then X is lattice $\mathbb{B}$-isometric to $C_{\#}(Q, l^1)$, $l^1 = l^1(\omega)$.*

$\lhd$ In Theorem 5.4 each component $l^1\big(\gamma, \Lambda_\gamma\big)$ is $\mathbb{B}_\gamma$-separable and hence its Boolean valued representation is a separable Banach lattice which is lattice isometric to the internal Banach lattice $l^1(\omega^\wedge)$. It follows that $l^1\big(\gamma, \Lambda_\gamma\big)$ is lattice $\mathbb{B}_\gamma$-isometric to $C_{\#}(Q_\gamma, l^1)$ for all $\gamma \in \Gamma$ by Proposition 4.1 and Corollary 4.4. From this it is obvious that X is $\mathbb{B}$-isometric to $C_{\#}(Q, l^1)$. $\rhd$

Proposition 5.7. *A $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattice is atomic if and only if it is $\mathbb{B}$-atomic and the Boolean algebra $\mathbb{B}$ is atomic.*

$\lhd$ The complete Boolean algebra $\mathbb{B}$ is atomic if and only if $\mathbb{B} = \mathscr{P}(A)$ for some set A and then X is the l^∞-sum of a family of Banach lattices $(X_a)_{a\in A}$. This l^∞-sum is evidently atomic if and only if X_a is atomic for all $a \in A$. $\rhd$

The following corollary should be compared with [7, Theorem 5.6].

Corollary 5.8. *An injective Banach lattice X is atomic if and only if there is a set of cardinals Γ such that the following lattice isometry holds:*

$$X \simeq \Big(\sum\nolimits_{\gamma\in\Gamma}^{\oplus} l^1(\gamma)\Big)_{l^\infty}.$$

$\lhd$ In Remark 5.5 each Q_γ is a one-point space by Proposition 5.8 and hence $C_{\#}\big(Q_\gamma, l^1(\gamma)\big)$ is lattice isometric to $l^1(\gamma)$. $\rhd$

Definition 5.9. The partition of unity $(\pi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ in $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$ satisfying the claim of Theorem 5.4 is called the *decomposition series* of X and is denoted by $d(X)$. Say that the decomposition series $d(X) = (\pi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ and $d(Y) = (\rho_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ of centrally atomic injective Banach lattices X and Y are *congruent* if there exists a Boolean isomorphism τ from $\mathbb{M}(X)$ onto $\mathbb{M}(Y)$ such that $\tau(\pi_\gamma) = \rho_\gamma$ for all $\gamma \in \Gamma$.

Theorem 5.10. *Centrally atomic injective Banach lattices X and Y are lattice isometric if and only if the Boolean algebras $\mathbb{M}(X)$ and $\mathbb{M}(Y)$ are isomorphic and the decomposition series $d(X)$ and $d(Y)$ are congruent.*

$\lhd$ *Sufficiency.* Let X and Y be centrally atomic injective Banach lattices with $d(X) = (\pi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ and $d(Y) = (\rho_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ and let $\mathscr{X}$ and $\mathscr{Y}$ be their respective Boolean valued representations. We identify X and Y with $\mathscr{X}{\Downarrow}$ and $\mathscr{Y}{\Downarrow}$, respectively. Denote $\mathbb{B} := \mathbb{M}(X)$ and $\mathbb{D} := \mathbb{M}(Y)$ and assume that there exists a Boolean isomorphism τ from $\mathbb{B}$ onto $\mathbb{D}$ such that $\tau(\pi_\gamma) = \rho_\gamma$ for all $\gamma \in \Gamma$. Recall that there is a bijective mapping $\tau^* : \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \to \mathbb{V}^{(\mathbb{D})}$ such that a ZFC-formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ is true within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ if and only if $\varphi(\tau^* x_1, \dots, \tau^* x_n)$ is true within $\mathbb{V}^{(\mathbb{D})}$ for all $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, see [3, 1.3.1, 1.3.2, and 1.3.5 (2)]. It follows that $\tau^*(\mathscr{X})$ is an atomic injective Banach lattice within $\mathbb{V}^{(\mathbb{D})}$. Moreover, the mapping $x \mapsto \tau^*(x)$ $(x \in \mathscr{X}{\Downarrow})$ ia a lattice isometry from $\mathscr{X}{\Downarrow}$ onto $\tau^*(\mathscr{X}){\Downarrow}$. If $\alpha = \mathrm{card}(\mathrm{at}_1(\mathscr{X}))$ and $\beta = \mathrm{card}(\mathrm{at}_1(\mathscr{Y}))$, then $\tau^*(\alpha) = \mathrm{mix}_{\gamma\in\Gamma}\, \tau(\pi_\gamma)\gamma^\wedge$ and $\beta = \mathrm{mix}_{\gamma\in\Gamma}\, \rho\gamma^\wedge$, so that $\beta = \tau^*(\alpha)$. By [3, 1.3.5 (2)] we have $\tau^*(\alpha) = \mathrm{card}(\mathrm{at}_1(\tau^*(\mathscr{X})))$ and $\mathrm{card}(\mathrm{at}_1(\mathscr{Y})) = \mathrm{card}(\mathrm{at}_1(\tau^*(\mathscr{X})))$. It follows that $\tau^*(\mathscr{X})$ and $\mathscr{Y}$ are lattice isometric and hence $\tau^*(\mathscr{X}){\Downarrow}$ and $\mathscr{Y}{\Downarrow}$ are lattice $\mathbb{B}$-isometric.

Necessity. Suppose that h is a lattice isomorphism from X onto Y. Then the mapping τ from $\mathbb{B}$ onto $\mathbb{D}$ defined by $\tau(\pi) = h \circ \tau \circ h^{-1}$ is a Boolean isomorphism. Moreover, $h(\mathbb{B}\text{-}\mathrm{at}_1(\pi X)) = \mathbb{B}\text{-}\mathrm{at}_1(\tau(\pi)Y)$. Now it can be easily verified that πX is $([\mathbb{O}, \pi], \gamma)$-atomic if and only if $\tau(\pi)Y$ is $([\mathbb{O}, \tau(\pi)], \gamma)$-atomic. It follows that $d(X)$ and $d(Y)$ are congruent. $\rhd$

Corollary 5.11. *Let X be a centrally atomic injective Banach lattice. Then there is a family of Stonean spaces $(Q_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, with Γ a set of cardinals, such that Q_γ is γ-stable for all $\gamma \in \Gamma$ and the following lattice $\mathbb{B}$-isometry holds:*

$$X \simeq_{\mathbb{B}} \Big(\sum\nolimits_{\gamma\in\Gamma}^{\oplus} C_\#(Q_\gamma, l^1(\gamma))\Big)_{l^\infty}.$$

If some family $(P_\delta)_{\delta\in\Delta}$ of Stonean spaces satisfies the above conditions, then $\Gamma = \Delta$, and P_γ is homeomorphic with Q_γ for all $\gamma \in \Gamma$.

$\lhd$ This is immediate from Theorem 5.10 and since Corollary 4.4 (see Remark 5.5). $\rhd$

Definition 5.12. The *second* $\mathbb{B}$-*dual* of a $\mathbb{B}$-cyclic Banach space is defined by $X^{\#\#} := (X^\#)^\# := \mathscr{L}_{\mathbb{B}}(X^\#, \Lambda)$. A $\mathbb{B}$-cyclic Banach space is said to be $\mathbb{B}$-*reflexive* if the image of X under the *canonical embedding* $X \to X^{\#\#}$ coincide with $X^{\#\#}$, see [3, p. 316].

Theorem 5.13. *Let X be a $\mathbb{B}$-reflexive injective Banach lattice with $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$. Then there are a sequence of Stonean spaces $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$, and an increasing sequence of naturals (n_k) such that the following lattice $\mathbb{B}$-isometry holds:*

$$X \simeq \Big(\sum\nolimits_{k\in\mathbb{N}}^{\oplus} C_\#(Q_k, l^1(n_k))\Big)_{l^\infty}.$$

If some family $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ of Stonean spaces satisfies the above conditions, then Q_k and P_k are homeomorphic for all $k \in \mathbb{N}$.

$\lhd$ Again identify X with $\mathscr{X}{\Downarrow}$, where $\mathscr{X}$ is an AL-space in $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. It follows from Theorem [3, Theorem 5.8.12] that $\mathscr{X}^*{\Downarrow} = \mathscr{X}{\Downarrow}^\#$ and $\mathscr{X}^{**}{\Downarrow} = \mathscr{X}{\Downarrow}^{\#\#}$. Therefore, X is $\mathbb{B}$-reflexive if and only if $[\![\mathscr{X}$ is reflexive $]\!] = \mathbb{1}$. Since a reflexive AL-space is finite-dimensional, we have

$$\mathbb{1} = [\![(\exists\, n \in \mathbb{N}^\wedge)\, \dim(\mathscr{X}) = n]\!] = \bigvee\nolimits_{n\in\mathbb{N}} [\![\dim(\mathscr{X}) = n^\wedge]\!].$$

This relation enables us to choose a countable partition of unity (b_n) in $\mathbb{B}$ such that $b_n \leqslant [\![\mathscr{X}$ is a $n^{\wedge}$-dimensional AL-space$]\!]$. Pick the sequence (n_k) of indices of nonzero projections in (b_n) and denote by Q_k the Stonean space of a Boolean algebra $\mathbb{B}_k := [\mathbb{O}, b_{n_k}]$. Now, by the Transfer Principle we conclude that $\mathbb{V}^{(\mathbb{B}_k)} \models$ "$b_{n_k} \wedge \mathscr{X}$ is lattice isometric to $l^1(n_k^{\wedge})$". The proof is concluded with the help of Theorem 5.10 taking into consideration that for each finite cardinal γ every complete Boolean algebra is γ-*stable* and $\gamma^{\wedge}$ is a finite cardinal within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. $\rhd$

References

1. *Kusraev A. G.* Boolean valued analysis and injective Banach lattices // Dokl. RAS.—2012.—Vol. 444, № 2.—P. 143–145.
2. *Kusraev A. G.* Classification of injective Banach lattices // Dokl. RAS.—2013.—Vol. 453, № 1.—P. 12–16.
3. *Kusraev A. G. and Kutateladze S. S.* Boolean Valued Analysis: Selected Topics.—Vladikavkaz: Vladikavkaz Scientific Center Press, 2014.—iv+400 p.—(Trends in Science. The South of Russia).
4. *Aliprantis C. D. and Burkinshaw O.* Positive Operators.—London etc.: Acad. Press Inc., 1985.—xvi+367 p.
5. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer, 1991.—xvi+395 p.
6. *Lotz H. P.* Extensions and liftings of positive linear mappings on Banach lattices // Trans. Amer. Math. Soc.—1975.—Vol. 211.—P. 85–100.
7. *Cartwright D. I.* Extension of positive operators between Banach lattices // Memoirs Amer. Math. Soc.—1975.—164 p.
8. *Haydon R.* Injective Banach lattices // Math. Z.—1974.—Vol. 156.—P. 19–47.
9. *Kusraev A. G.* A Boolean transfer principle for injective Banach lattices // Sib. Mat. Zh.—2015.—Vol. 56, № 5.—[DOI 10.17377/smzh.2015.56.511].
10. *Kusraev A. G. and Kutateladze S. S.* Introduction to Boolean Valued Analysis.—M.: Nauka, 2005.—526 p.—[in Russian].
11. *Gordon E. I.* Real numbers in Boolean-valued models of set theory and K-spaces // Dokl. Akad. Nauk SSSR.—1977.—Vol. 237, № 4.—P. 773–775.
12. *Kusraev A. G.* Dominated Operators.—M.: Nauka, 2003.— 619 p.—[in Russian].
13. *Luxemburg W. A. J. and Zaanen A. C.* Riesz Spaces. Vol. 1.—Amsterdam and London: North-Holland, 1971.—514 p.

Received August 31, 2015.

Kusraev Anatoly Georgievich
Vladikavkaz Science Center of the RAS, *Chaiman*
22 Markus Street, Vladikavkaz, 362027, Russia;
K. L. Khetagurov North Ossetian State University
44–46 Vatutin Street, Vladikavkaz, 362025, Russia
E-mail: `kusraev@smath.ru`

АТОМИЧНОСТЬ В ИНЪЕКТИВНЫХ БАНАХОВЫХ РЕШЕТКАХ

Кусраев А. Г.

Цель заметки — рассмотреть булевозначную интерпретацию понятия атомической банаховой решетки и дать полное описание соответствующего класса инъективных банаховых решеток.

Ключевые слова: инъективная банахова решетка, атомическая банахова решетка, булевозначное представление, классификация.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 3, С. 53–55

УДК **517.9**

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ В ПРОСТРАНСТВАХ РОСТКОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С. Н. Мелихов

К 70-летию
Сёмена Самсоновича Кутателадзе

В работе доказано, что любой абсолютно сходящийся ряд в пространстве ростков всех аналитических на произвольном множестве $M \subset \mathbb{C}^N$ функций, наделенном топологией проективного предела, сходится абсолютно в пространстве Фреше всех функций, аналитических в некоторой открытой окрестности множества M. Это позволяет, в частности, освободиться от предположений о росте показателей рядов экспонент, делавшихся в некоторых утверждениях ранее.

Ключевые слова: пространство ростков аналитических функций, абсолютно сходящиеся ряды, выпуклое локально замкнутое множество.

Для $\mu, z \in \mathbb{C}^N$ положим

$$\langle \mu, z\rangle := \sum_{j=1}^{N} \mu_j z_j, \quad e_\mu(z) := \exp\langle \mu, z\rangle, \quad |\mu| := \left(\sum_{j=1}^{N} |\mu_j|^2\right)^{1/2}.$$

В работе [2] были исследованы абсолютно представляющие системы экспонент $\left(e_{\lambda_k}\right)_{k\in M}$ (M — бесконечное подмножество $\mathbb{N}^N$) в пространстве $A(Q)$ ростков всех функций, аналитических на выпуклом локально замкнутом множестве Q в $\mathbb{C}^N$. Некоторые утверждения в [2] были установлены при дополнительном предположении

$$\lim_{|k|\to\infty} \frac{\log|k|}{|\lambda_k|} = 0. \tag{1}$$

В этой статье доказывается одно свойство абсолютно сходящихся рядов в пространстве ростков аналитических функций (теорема 1), которое позволяет, в частности, от условия (1) освободиться.

Приведем некоторые сведения о пространствах ростков аналитических функций [4]. Если $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ открыто, то $A(\Omega)$ — пространство всех аналитических в Ω функций с топологией равномерной сходимости на семействе всех компактных подмножеств Ω. Если K — компакт в $\mathbb{C}^N$, то $A(K)$ — пространство ростков всех функций, аналитических на K, т. е. в некоторой открытой окрестности K. В этом случае $A(K)$ наделяется топологией индуктивного предела пространств $A(\Omega)$, где Ω пробегает семейство всех открытых окрестностей K. Пусть теперь M — произвольное подмножество $\mathbb{C}^N$. Через $A(M)$ обозначим пространство ростков всех функций, аналитических на M, т. е. в некоторой

открытой окрестности M. В общем случае в $A(M)$ можно вводить две естественные топологии. Топология pr в $A(M)$ — топология проективного предела пространств $A(K)$, где K пробегает семейство всех компактных подмножеств M. Топология in в $A(M)$ — топология индуктивного предела пространств $A(\Omega)$, где Ω пробегает семейство всех открытых окрестностей M. Топология in всегда не слабее топологии pr. Согласно [4, доказательство утверждения 1.2] всякое ограниченное в $(A(M), \mathrm{pr})$ множество содержится и ограничено в $A(\Omega)$ для некоторой открытой окрестности Ω множества M. Отсюда, в частности, следует, что ограниченные в $(A(M), \mathrm{pr})$ и в $(A(M), \mathrm{in})$ множества — одни и те же. Оказывается, аналогичный факт имеет место и для абсолютно сходящихся рядов.

Для множества $S \subseteq \mathbb{C}^N$, функции $f : S \to \mathbb{C}$ положим $p_S(f) := \sup_{z\in S} |f(z)|$. Далее, M — подмножество $\mathbb{C}^N$.

Теорема 1. *Пусть ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *сходится абсолютно в* $(A(M), \mathrm{pr})$. *Тогда существует открытая окрестность* Ω *множества* M *такая, что все функции* f_n, $n \in \mathbb{N}$, *аналитически продолжаются в* Ω *и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *сходится абсолютно в* $A(\Omega)$.

$\lhd$ Множество $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено в $(A(M), \mathrm{pr})$. По доказательству предложения 1.2 (см. [4]) существует открытая окрестность ω множества M такая, что каждая функция f_n, $n \in \mathbb{N}$, (однозначно) аналитически продолжается в ω. Пусть K — компакт в M. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится абсолютно в пространстве $A(K)$ и (LB)-пространство $A(K)$ регулярно (см., например, [1]), то существует открытая окрестность $\Omega_K \subset \omega$ множества K такая, что $f_n \in A(\Omega_K)$, $n \in \mathbb{N}$, и $\sum_{n=1}^{\infty} p_{\Omega_K}(f_n) < +\infty$. Пусть $\Omega := \bigcup_K \Omega_K$ (K пробегает семейство всех компактных подмножеств Ω). Тогда Ω — открытая окрестность M, в которую аналитически продолжаются все функции f_n, $n \in \mathbb{N}$. Возьмем компакт R в Ω. Найдется конечное семейство компактов K_j, $1 \leqslant j \leqslant J$, в M, для которых $R \subseteq \bigcup_{j=1}^{J} \Omega_{K_j}$. Значит,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_R(f_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \max_{1\leqslant j\leqslant J} p_{\Omega_{K_j}}(f_n) \leqslant \sum_{j=1}^{J} \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_{\Omega_{K_j}}(f_n) \right) < +\infty.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится абсолютно в $A(\Omega)$. $\rhd$

Следствие 2. *Абсолютно сходящиеся ряды в* $(A(M), \mathrm{pr})$ *и в* $(A(M), \mathrm{in})$ *— одни и те же.*

Из теоремы 1 вытекает, что замечание 7 (б), теорема 8, следствия 9 и 10, теорема 14 статьи [2] справедливы без предположения (1). В частности, имеют место следующие утверждения. В них Q — выпуклое локально замкнутое множество в $\mathbb{C}^N$, т. е. выпуклое множество, обладающее фундаментальной последовательностью компактных подмножеств (см. [2, § 1]).

Следствие 3. *Пусть* Q *обладает базисом окрестностей, состоящим из областей голоморфности. Если в* $(A(Q), \mathrm{pr})$ *существует абсолютно представляющая система* $\left(e_{\mu_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, *то пересечение* Q *с любой опорной гиперплоскостью к* $\overline{Q}$ *компактно.*

$\lhd$ Возьмем $f \in A(Q)$. Существует последовательность $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_{\mu_n}$, и последний ряд абсолютно сходится в $(A(Q), \mathrm{pr})$ (к f). По теореме 1 найдется открытая окрестность Ω множества Q, для которой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_{\mu_n}$ сходится абсолютно в $A(\Omega)$. Тогда он сходится абсолютно в $A(\operatorname{conv}\Omega)$ (см. доказательство теоремы 8 в [2]); $\operatorname{conv}\Omega$ обозначает выпуклую оболочку Ω. Поэтому f аналитически продолжается в $\operatorname{conv}\Omega$. Следовательно, Q обладает базисом окрестностей, состоящим из выпуклых областей. Значит [2, лемма 3], пересечение Q с любой опорной гиперплоскостью к $\overline{Q}$ компактно. $\rhd$

Замечание 4. Q обладает базисом окрестностей, состоящим из областей голоморфности, например, если 1) $Q \subseteq \mathbb{C}$; 2) пересечение Q с любой комплексной опорной гиперплоскостью к $\overline{Q}$ компактно; 3) $Q \subseteq \mathbb{R}^N$ [3, замечание 3.12].

Следствие 5. *Пусть Q обладает базисом окрестностей, состоящим из областей голоморфности, и существует опорная гиперплоскость к $\overline{Q}$, пересечение которой с Q не является компактным. Тогда в $A(Q)$ не существует ни одной абсолютно представляющей системы $\left(e_{\mu_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. В частности, это так, если $Q \subset \mathbb{R}^N$ и Q некомпактно.*

Литература

1. *Макаров Б. М.* Об индуктивных пределах нормированных пространств // Вестник ЛГУ.— 1965.— № 13, вып. 3.—С. 50–58.
2. *Мелихов С. Н., Момм З.* О свойстве внутрь-продолжаемости представляющих систем экспонент на выпуклых локально замкнутых множествах // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, вып. 2.—С. 36–45.
3. *Bonet J., Meise R., Melikhov S. N.* The dual of the space of holomorphic functions on locally closed convex sets // Publ. Mat.—2005.—Vol. 49.—P. 487–509.
4. *Martineau A.* Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes // Math. Annal.—1966.—Vol. 163.—P. 62–88.

Статья поступила 15 мая 2015 г.

Мелихов Сергей Николаевич
Южный федеральный университет,
профессор кафедры алгебры и дискретной математики,
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;

Южный математический институт,
ведущий научный сотрудник отдела мат. анализа
РОССИЯ, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `melih@math.rsu.ru`

A REMARK ON ABSOLUTELY CONVERGENT SERIES IN SPACES OF GERMS OF ANALYTIC FUNCTIONS

Melikhov S. N.

It is proved that each absolutely convergent series in the space of germs of all analytic functions on a some set $M \subset \mathbb{C}^N$ endowed with the projective topology converges absolutely in the Fréchet space of analytic functions on an open neighborhood of M. In particular, this allows us to remove the assumptions about the growth of exponents of exponential series, posed in some previous statements.

Key words: space of germs of analytic functions, absolutely convergent series, convex locally closed set.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 3, С. 56–64

УДК **517.51**

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЙВЛЕТ-РЯДОВ ЧЕБЫШЕВА ВТОРОГО РОДА

М. С. Султанахмедов

В работе вводятся вейвлеты и масштабирующие функции, основанные на полиномах Чебышева второго рода, доказывается их ортогональность. На их основе построен ортонормированный базис в пространстве функций, интегрируемых с квадратом. Исследованы аппроксимативные свойства частичных сумм соответствующих вейвлет-рядов.

Ключевые слова: полиномиальные вейвлеты, полиномы Чебышева второго рода, ортогональность, формула Кристоффеля — Дарбу, аппроксимация функций, вейвлет-ряды.

1. Введение

В последние годы интенсивное развитие получила теория вейвлетов, основанных на тригонометрических функциях и алгебраических полиномах. Так, в [1] впервые введены в рассмотрение вейвлеты на основе тригонометрических полиномов. Позднее, в [2] вместо тригонометрических были использованы алгебраические полиномы, доказана ортогональность в смысле чебышевского веса первого рода между вейвлетами и соответствующими масштабирующими функциями. В [3] и [4] разработана обобщенная теория конструирования полиномиальных вейвлетов. В дальнейшем техника разложения функций в ряды по полиномиальным вейвлетам получила развитие в работах многих авторов (см., например, [5–7]). В недавней работе [8] представлен новый, отличный от описанных ранее, способ построения ортогональных вейвлетов с использованием полиномов Чебышева первого рода.

В данной статье конструируются вейвлеты на основе полиномов Чебышева второго рода и их нулей. Используя свойства самих полиномов Чебышева, такие как ортогональность и формула Кристоффеля — Дарбу, доказана ортогональность вейвлетов и соответствующих масштабирующих функций. На их основе построена система функций, образующая ортонормированный базис в пространстве функций, интегрируемых с квадратом, получено неравенство Лебега для нее.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства полиномов Чебышева второго рода, которые мы соберем в следующем разделе (см., например, [9]).

---

2. Некоторые сведения о полиномах Чебышева второго рода

Через $L_{2,w}([-1;1])$, где $w(x) = \sqrt{1-x^2}$, обозначим евклидово пространство интегрируемых функций $f(x)$ таких, что $\int_{-1}^{1} f^2(x)\, w(x)\, dx < \infty$. Скалярное произведение в нем определим с помощью равенства

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)\, dx. \tag{1}$$

Хорошо известно, что полиномы Чебышева второго рода

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

образуют ортогональный базис в $L_{2,w}([-1;1])$, а именно

$$\langle U_n, U_m\rangle = \frac{\pi}{2}\,\delta_{nm} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n = m; \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \tag{2}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера. Для полиномов $U_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots$, имеет место формула Кристоффеля — Дарбу

$$K_n(x,y) = \sum_{m=0}^{n} U_m(x)\, U_m(y) = \frac{1}{2}\left[\frac{U_{n+1}(x)U_n(y) - U_{n+1}(y)U_n(x)}{x-y}\right]. \tag{3}$$

Узлы

$$\xi_k^{(n)} = \cos\theta_k^{(n)} = \cos\frac{\pi(k+1)}{n+1}, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

являются нулями полинома $U_n(x)$, т. е. $U_n\big(\xi_k^{(n)}\big) = 0$, $k = 0, \ldots, n-1$.

3. Вспомогательные утверждения

В данном разделе установим некоторые утверждения, которые будут использованы при доказательстве основных результатов.

Лемма 3.1. *Для любых* $\xi_k^{(n)}$ *и* $m \leqslant n$ *справедливо равенство*

$$U_{n+m}\big(\xi_k^{(n)}\big) = -U_{n-m}\big(\xi_k^{(n)}\big).$$

$\lhd$ Воспользовавшись формулой произведения синуса и косинуса, упростим выражение

$$2\sin\big((n+1)\theta_k^{(n)}\big)\cdot\cos m\theta_k^{(n)} = \sin\big((n+1+m)\,\theta_k^{(n)}\big) + \sin\big((n+1-m)\theta_k^{(n)}\big).$$

Разделив обе части на $\sin\theta_k^{(n)}$, получим

$$U_n\big(\xi_k^{(n)}\big)\cdot\cos m\theta_k^{(n)} = U_{n+m}\big(\xi_k^{(n)}\big) + U_{n-m}\big(\xi_k^{(n)}\big),$$

откуда, с учетом того, что $U_n\big(\xi_k^{(n)}\big) = 0$, приходим к требуемому равенству. $\rhd$

Следствие 3.1. *Если* $m \leqslant n$, *то имеет место равенство*

$$U_{n+m}\big(\xi_k^{(n)}\big)U_{n+m}\big(\xi_l^{(n)}\big) = U_{n-m}\big(\xi_k^{(n)}\big)U_{n-m}\big(\xi_l^{(n)}\big).$$

Из следствия 3.1 непосредственно вытекает

Лемма 3.2. *Для любых двух нулей* $\xi_k^{(n)}$ *и* $\xi_l^{(n)}$ *полинома* $U_n(x)$ *справедливо*

$$\sum_{i=n+1}^{2n} U_i\big(\xi_k^{(n)}\big)U_i\big(\xi_l^{(n)}\big) = \sum_{j=0}^{n-1} U_j\big(\xi_k^{(n)}\big)U_j\big(\xi_l^{(n)}\big).$$

Лемма 3.3. *Для любых* $\xi_k^{(n)}$ *и* $\xi_l^{(n)}$ *имеет место равенство*

$$K_n\big(\xi_k^{(n)}, \xi_l^{(n)}\big) = \sum_{m=0}^{n} U_i\big(\xi_k^{(n)}\big)U_i\big(\xi_l^{(n)}\big) = \frac{n+1}{2\sin^2\frac{\pi(k+1)}{n+1}}\,\delta_{kl}.$$

$\lhd$ Пусть сначала $k \neq l$. Тогда

$$K_n\big(\xi_k^{(n)}, \xi_l^{(n)}\big) = \sum_{m=0}^{n} U_i\big(\xi_k^{(n)}\big)U_i\big(\xi_l^{(n)}\big) = \frac{1}{2}\left[\frac{U_{n+1}\big(\xi_k^{(n)}\big)0 - U_{n+1}\big(\xi_l^{(n)}\big)0}{\xi_k^{(n)} - \xi_l^{(n)}}\right] = 0. \tag{4}$$

Если же $k = l$, то

$$\begin{aligned} K_n\big(\xi_k^{(n)}, \xi_k^{(n)}\big) &= \sum_{m=0}^{n} U_i^2\big(\xi_k^{(n)}\big) = \sum_{m=0}^{n} U_i^2\big(\cos\theta_k^{(n)}\big) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\sin^2\big((j+1)\theta_k^{(n)}\big)}{\sin^2\theta_k^{(n)}} \\ = \frac{1}{2\sin^2\theta_k^{(n)}} \sum_{j=0}^{n}\Big[1 - \cos\big((j+1)2\theta_k^{(n)}\big)\Big] &= \frac{1}{2\sin^2\theta_k^{(n)}}\left[n+1-\sum_{j=1}^{n+1}\cos\big(j2\theta_k^{(n)}\big)\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1}\cos\big(j2\theta_k^{(n)}\big) = 1 + \sum_{j=1}^{n}\cos\big(j2\theta_k^{(n)}\big) &= \frac{1}{2} + \frac{\sin\Big(\big(n+\frac{1}{2}\big)\,2\theta_k^{(n)}\Big)}{2\sin\theta_k^{(n)}} \\ = \frac{1}{2} + \frac{\sin\Big(2\pi(k+1) - \frac{\pi(k+1)}{n+1}\Big)}{2\sin\frac{\pi(k+1)}{n+1}} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi(k+1)}{n+1}}{\sin\frac{\pi(k+1)}{n+1}} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Из (5) и (6) имеем

$$K_n\big(\xi_k^{(n)}, \xi_k^{(n)}\big) = \frac{n+1}{2\sin^2\frac{\pi(k+1)}{n+1}}. \tag{7}$$

Утверждение леммы вытекает из (4) и (7). $\rhd$

Лемма 3.4. *Для любых* $0 \leqslant k, l \leqslant n$ *справедливо равенство*

$$K_n\big(\xi_k^{(n+1)}, \xi_l^{(n+1)}\big) = \frac{n+2}{2\sin^2\frac{\pi(k+1)}{n+2}}\,\delta_{kl}.$$

$\lhd$ Преобразуем формулу Кристоффеля — Дарбу к следующему виду

$$\begin{aligned} K_n\big(\xi_k^{(n+1)}, \xi_l^{(n+1)}\big) &= \sum_{m=0}^{n} U_i\big(\xi_k^{(n+1)}\big)U_i\big(\xi_l^{(n+1)}\big) \\ &= \sum_{m=0}^{n+1} U_i\big(\xi_k^{(n+1)}\big)U_i\big(\xi_l^{(n+1)}\big) - U_{n+1}\big(\xi_k^{(n+1)}\big)U_{n+1}\big(\xi_l^{(n+1)}\big). \end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись тем, что $U_{n+1}\big(\xi_k^{(n+1)}\big)U_{n+1}\big(\xi_l^{(n+1)}\big)=0$, находим

$$K_n\big(\xi_k^{(n+1)},\xi_l^{(n+1)}\big)=K_{n+1}\big(\xi_k^{(n+1)},\xi_l^{(n+1)}\big).$$

Применяя теперь лемму 3.3, приходим к требуемому утверждению. $\rhd$

4. Конструирование масштабирующих и вейвлет-функций

Определение 4.1. *Масштабирующей функцией Чебышева второго рода* назовем полином вида

$$\phi_{n,k}(x)=\sum_{j=0}^{n}U_j(x)\,U_j\big(\xi_k^{(n+1)}\big),$$

где $n=1,2,\ldots$ и $k=0,1,\ldots,n$.

Теорема 4.1. *Система масштабирующих функций $\{\phi_{n,k}(x)\}_{k=0}^{n}$ является ортогональной в $L_{2,w}([-1;1])$. При этом имеет место равенство*

$$\langle\phi_{n,k},\phi_{n,l}\rangle=\frac{\pi(n+2)}{4\sin^2\frac{\pi(k+1)}{n+2}}\,\delta_{kl}.$$

$\lhd$ Воспользовавшись свойством ортогональности (2), имеем

$$\langle\phi_{n,k},\phi_{n,l}\rangle=\int\limits_{-1}^{1}\left[\sum_{i=0}^{n}U_i(x)\,U_i\big(\xi_k^{(n+1)}\big)\right]\left[\sum_{j=0}^{n}U_j(x)\,U_j\big(\xi_l^{(n+1)}\big)\right]w(x)\,dx$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}w(x)\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}U_i(x)\,U_i\big(\xi_k^{(n+1)}\big)\,U_j(x)\,U_j\big(\xi_l^{(n+1)}\big)\,dx$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}U_i\big(\xi_k^{(n+1)}\big)U_j\big(\xi_l^{(n+1)}\big)\int\limits_{-1}^{1}U_i(x)U_j(x)w(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\sum_{j=0}^{n}U_j\big(\xi_k^{(n+1)}\big)U_j\big(\xi_l^{(n+1)}\big).$$

Отсюда, применяя лемму 3.4, приходим к требуемому равенству. $\rhd$

Определение 4.2. Назовем *вейвлет-функцией Чебышева второго рода* полином

$$\psi_{n,k}(x)=\sum_{j=n+1}^{2n}U_j(x)U_j\big(\xi_k^{(n)}\big)$$

для любых $n=1,2,\ldots$ и $k=0,1,\ldots,n-1$.

Теорема 4.2. *Система вейвлет-функций $\{\psi_{n,k}(x)\}_{k=0}^{n-1}$ является ортогональной в $L_{2,w}([-1;1])$. При этом имеет место равенство*

$$\langle\psi_{n,k},\psi_{n,l}\rangle=\frac{\pi(n+1)}{4\sin^2\frac{\pi(k+1)}{n+1}}\,\delta_{kl}.$$

$\lhd$ Используя рассуждения, аналогичные тем, которые применялись при доказательстве теоремы 4.1, легко заметить, что

$$\langle\psi_{n,k},\psi_{n,l}\rangle=\frac{\pi}{2}\sum_{i=n+1}^{2n}U_i\big(\xi_k^{(n)}\big)U_i\big(\xi_l^{(n)}\big).$$

Обратимся теперь к лемме 3.2, тогда правую часть последнего равенства можно переписать следующим образом:

$$\langle \psi_{n,k}, \psi_{n,l} \rangle = \frac{\pi}{2} \sum_{j=0}^{n-1} U_j\big(\xi_k^{(n)}\big)\, U_j\big(\xi_l^{(n)}\big).$$

Чтобы убедиться в справедливости теоремы, остается воспользоваться леммой 3.4. $\triangleright$

Теорема 4.3. *При каждом фиксированном n функции $\phi_{n,k}(x)$ и $\psi_{n,l}(x)$ ортогональны в $L_{2,w}([-1;1])$, т. е. $\langle \phi_{n,k}, \psi_{n,l} \rangle = 0$.*

$\triangleleft$ Для скалярного произведения имеем

$$\begin{aligned}\langle \phi_{n,k}, \psi_{n,l} \rangle &= \int\limits_{-1}^{1} \Big[\sum_{i=0}^{n} U_i(x) U_i\big(\xi_k^{(n+1)}\big)\Big]\Big[\sum_{j=n+1}^{2n} U_j(x) U_j\big(\xi_l^{(n)}\big)\Big] w(x)\,dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=n+1}^{2n} U_i\big(\xi_k^{(n+1)}\big) U_j\big(\xi_l^{(n)}\big) \int\limits_{-1}^{1} U_i(x) U_j(x) w(x)\,dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=n+1}^{2n} \delta_{ij} U_i\big(\xi_k^{(n+1)}\big) U_j\big(\xi_l^{(n)}\big) = 0. \ \triangleright\end{aligned}$$

Очевидным следствием теоремы 4.3 является следующее утверждение

Следствие 4.1. *Для любых $n = 1, 2, \ldots$ и $k = 0, 1, \ldots, n-1$, вейвлет $\psi_{n,k}(x)$ ортогонален к $\phi_{1,0}(x)$ и $\phi_{1,1}(x)$, т. е. $\langle \phi_{0,1}, \psi_{n,l} \rangle = 0$ и $\langle \phi_{1,1}, \psi_{n,l} \rangle = 0$.*

5. Вейвлет-ряд Чебышева второго рода

Положим

$$\widehat{\phi}_{m,k}(x) = \frac{\phi_{2^m,k}(x)}{\sqrt{\langle \phi_{2^m,k}, \phi_{2^m,k} \rangle}} = \phi_{2^m,k}(x) \frac{2\left|\sin \frac{\pi(k+1)}{2^m+2}\right|}{\sqrt{\pi(2^m+2)}},$$

$$\widehat{\psi}_{m,k}(x) = \frac{\psi_{2^m,k}(x)}{\sqrt{\langle \psi_{2^m,k}, \psi_{2^m,k} \rangle}} = \psi_{2^m,k}(x) \frac{2\left|\sin \frac{\pi(k+1)}{2^m+1}\right|}{\sqrt{\pi(2^m+1)}}$$

и введем обозначения

$$\Phi_0 = \left\{\widehat{\phi}_{0,0}(x), \widehat{\phi}_{0,1}(x)\right\}, \quad \Psi_1 = \left\{\widehat{\psi}_{0,0}(x)\right\}, \quad \Psi_2 = \left\{\widehat{\psi}_{1,0}(x), \widehat{\psi}_{1,1}(x)\right\}, \ldots,$$

$$\Psi_m = \left\{\widehat{\psi}_{m-1,0}(x), \widehat{\psi}_{m-1,1}(x), \ldots, \widehat{\psi}_{m-1,2^{m-1}-1}(x)\right\},$$

$$\Psi_{m+1} = \left\{\widehat{\psi}_{m,0}(x), \widehat{\psi}_{m,1}(x), \ldots, \widehat{\psi}_{m,2^m-1}(x)\right\}, \ldots,$$

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_m = \left\{\Phi_0, \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m\right\} = \Big\{&\widehat{\phi}_{0,0}(x), \widehat{\phi}_{0,1}(x), \widehat{\psi}_{0,0}(x), \widehat{\psi}_{1,0}(x), \widehat{\psi}_{1,1}(x), \ldots, \\ &\widehat{\psi}_{m-1,0}(x), \widehat{\psi}_{m-1,1}(x), \ldots, \widehat{\psi}_{m-1,2^{m-1}-1}(x)\Big\}.\end{aligned}$$

Как отмечено выше (следствие 4.1), масштабирующие функции из Φ_0 ортогональны ко всем вейвлетам $\{\widehat{\psi}_{n,k}(x),\ k = 0, 1, \dots, n-1\}_{n=1}^{\infty}$. С другой стороны, справедлива следующая

Теорема 5.4. *Если $m \neq s$, то вейвлеты $\widehat{\psi}_{m,k}(x) \in \Psi_m$ и $\widehat{\psi}_{s,l}(x) \in \Psi_s$ ортогональны в $L_{2,w}([-1;1])$.*

$\lhd$ С учетом того факта, что $\{2^m+1, 2^m+2, \dots, 2^{m+1}\} \bigcap \{2^s+1, 2^s+2, \dots, 2^{s+1}\} = \varnothing$ в случае $m \neq s$, имеем

$$\bigl\langle \widehat{\psi}_{m,k}(x), \widehat{\psi}_{s,l}(x) \bigr\rangle = \int\limits_{-1}^{1} \left[\sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} U_i(x) U_i\bigl(\xi_k^{(2^m)}\bigr) \right] \left[\sum_{j=2^s+1}^{2^{s+1}} U_j(x) U_j\bigl(\xi_l^{(2^s)}\bigr) \right] w(x)\, dx$$

$$= \sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} \sum_{j=2^s+1}^{2^{s+1}} U_i\bigl(\xi_k^{(2^m)}\bigr) U_i\bigl(\xi_l^{(2^s)}\bigr) \int\limits_{-1}^{1} U_i(x) U_j(x) w(x)\, dx$$

$$= \sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} \sum_{j=2^s+1}^{2^{s+1}} \delta_{ij} U_i\bigl(\xi_k^{(2^m)}\bigr) U_i\bigl(\xi_l^{(2^s)}\bigr) = 0. \rhd$$

Далее, пусть $H_{2^m,w}([-1;1])$ — подпространство в $L_{2,w}([-1;1])$, состоящее из алгебраических полиномов степени не выше 2^m. Тогда справедлива следующая

Теорема 5.5. *Система функций $\mathscr{P}_m$ образует ортонормированный базис в $H_{2^m,w}([-1;1])$, т. е. любой полином $P_n(x) \in H_{2^m,w}([-1;1])$ степени $n \leqslant 2^m$ представим в виде линейной комбинации*

$$P_n(x) = a_0 \widehat{\phi}_{0,0}(x) + a_1 \widehat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k} \widehat{\psi}_{j,k}(x).$$

$\lhd$ По построению видно, что система $\mathscr{P}_m$ состоит из 2^m+1 различных ортонормированных полиномов, каждый из которых имеет степень, не превосходящую 2^m. Следовательно, $\mathscr{P}_m$ представляет собой линейно-независимую систему полиномов из подпространства $H_{2^m,w}([-1;1])$, размерность которого равна 2^m+1, из чего и вытекает справедливость утверждения теоремы 5.5. $\rhd$

Теорема 5.6. *Система функций*

$$\mathscr{P} = \bigl\{\Phi_0, \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m, \dots\bigr\} = \Bigl\{\widehat{\phi}_{0,0}(x), \widehat{\phi}_{0,1}(x), \widehat{\psi}_{0,0}(x), \widehat{\psi}_{1,0}(x), \widehat{\psi}_{1,1}(x), \dots,$$
$$\widehat{\psi}_{m-1,0}(x), \widehat{\psi}_{m-1,1}(x), \dots, \widehat{\psi}_{m-1,2^{m-1}-1}(x), \dots\Bigr\}$$

образует в $L_{2,w}([-1;1])$ ортонормированный базис.

$\lhd$ Поскольку множество всех алгебраических полиномов всюду плотно в $L_{2,w}([-1;1])$, то справедливость утверждения теоремы 5.6 вытекает из теоремы 5.5. $\rhd$

Из теоремы 5.6 следует, что произвольная функция $f(x) \in L_{2,w}([-1;1])$ может быть представлена в виде сходящегося в $L_{2,w}([-1;1])$ ряда

$$f(x) = \widehat{a}_0 \widehat{\phi}_{0,0}(x) + \widehat{a}_1 \widehat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \widehat{b}_{j,k} \widehat{\psi}_{j,k}(x), \tag{8}$$

где

$$\widehat{a}_0 = \int\limits_{-1}^{1} f(t)\widehat{\phi}_{0,0}(t)w(t)\,dt, \quad \widehat{a}_1 = \int\limits_{-1}^{1} f(t)\widehat{\phi}_{0,1}(t)w(t)\,dt,$$

$$\widehat{b}_{j,k} = \int\limits_{-1}^{1} f(t)\widehat{\psi}_{j,k}(t)w(t)\,dt, \quad j = 0, 1, \ldots, m; \; k = 0, 1, \ldots, 2^j - 1.$$

Через $\mathrm{V}_{2^m}(f,x)$ обозначим частичную сумму ряда (8) следующего вида:

$$\mathrm{V}_{2^m}(f,x) = \widehat{a}_0\widehat{\phi}_{0,0}(x) + \widehat{a}_1\widehat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{2^j-1} \widehat{b}_{j,k}\widehat{\psi}_{j,k}(x). \tag{9}$$

6. Аппроксимативные свойства частичных сумм $\mathrm{V}_{2^m}(f,x)$

Как отмечалось выше, система $\{U_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ образует в $L_{2,w}([-1;1])$ ортогональный базис, следовательно, любая функция $f(x) \in L_{2,w}([-1;1])$ представима в виде ряда Фурье по ней:

$$f(x) = S_n(f)(x) + R_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k U_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k U_k(x),$$

где $f_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)U_k(t)\,w(t)\,dt$. В частности,

$$f(x) = S_{2^m}(f)(x) + R_{2^m}(f)(x).$$

С другой стороны, поскольку $\mathrm{V}_{2^m}(f,x)$, в силу теоремы 5.5, представляет собой линейный оператор, проектирующий пространство $L_{2,w}([-1;1])$ на $H_{2^m,w}([-1;1])$, причем такой, что $V_{2^m}(U_k, x) = 0$ $(k \geqslant 2^m + 1)$, то

$$\mathrm{V}_{2^m}(f,x) = \mathrm{V}_{2^m}\big(S_{2^m}(f), x\big) + \mathrm{V}_{2^m}\big(R_{2^m}(f), x\big) = S_{2^m}(f)(x).$$

Таким образом, вопрос об аппроксимативных свойствах частичных сумм (9) ряда (8) сводится к аналогичной задаче для частичных сумм $S_{2^m}(f)(x)$ ряда Фурье по полиномам Чебышева второго рода:

$$f(x) - \mathrm{V}_{2^m}(f,x) = f(x) - S_{2^m}(f)(x). \tag{10}$$

Хорошо известно, что отклонение частичной суммы $S_{2^m}(f)(x)$ от функции $f(x)$ может быть оценено с помощью неравенства Лебега

$$|f(x) - S_{2^m}(f)(x)| \leqslant E_{2^m}(f)\,(1 + L_{2^m}(x)),$$

где $E_{2^m}(f)$ — погрешность наилучшего равномерного на $[-1, 1]$ приближения функции $f(x)$ алгебраическим полиномом степени не выше 2^m, $L_{2^m}(x)$ — функция Лебега ряда Фурье по полиномам Чебышева второго рода, т. е.

$$L_{2^m}(x) = \int\limits_{-1}^{1} \left| \sum_{k=0}^{2^m} \widehat{U}_k(x)\widehat{U}_k(t) \right| w(t)\,dt.$$

Для класса непрерывных функций $f \in C[-1,1]$ из результатов [10] следует асимптотическая оценка функции Лебега

$$L_{2^m}(x) = \begin{cases} \frac{4\ln 2}{\pi^2} m + O(1), & x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon], \\ O(2^m), & x \in [-1, -1+\varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1], \end{cases}$$

где ε — произвольно малое число, удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon < 1$.

Асимптотическое поведение верхней грани отклонения частичных сумм $S_n(f)(x)$ от функций $f(x)$ из класса Липшица $\operatorname{Lip}\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ исследовано в работе [11]. Из полученных там результатов вытекает равенство

$$\sup_{f \in \operatorname{Lip}\alpha} |f(x) - S_{2^m}(f)(x)| = 2^{-\alpha m} \Bigg[2^{\alpha+1} \Big(\sqrt{1-x^2}\Big)^{\alpha} \frac{\ln 2}{\pi} m \int\limits_0^{\pi/2} t^{\alpha} \sin t \, dt$$
$$= O\bigg(\frac{\sin 2^m \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + 1\bigg)\Bigg],$$

которое для $0 < \alpha < 1$ выполняется равномерно относительно $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < 1)$, а для $\alpha = 1$ — равномерно на всем сегменте $[-1,1]$.

В качестве следствия указанных оценок мы отмечаем для $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$

$$|f(x) - \mathrm{V}_{2^m}(f,x)| \leqslant E_{2^m}(f) \left(\frac{4\ln 2}{\pi^2} m + O(1) \right), \quad f \in C[-1,1],$$

$$\sup_{\substack{f \in \operatorname{Lip}\alpha, \\ 0<\alpha<1}} |f(x) - \mathrm{V}_{2^m}(f,x)|$$
$$= 2^{-\alpha m} \left[2^{\alpha+1} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{\alpha} \frac{\ln 2}{\pi} m \int\limits_0^{\pi/2} t^{\alpha} \sin t \, dt + O\left(\frac{\sin 2^m \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + 1 \right) \right].$$

Кроме того, для $x \in [-1,1]$ имеем

$$\sup_{f \in \operatorname{Lip} 1} |f(x) - \mathrm{V}_{2^m}(f,x)|$$
$$= 2^{-m} \left[\frac{4\ln 2}{\pi} m\sqrt{1-x^2} \int\limits_0^{\pi/2} t \sin t \, dt + O\left(\frac{\sin 2^m \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + 1 \right) \right].$$

В то же время следует отметить, что, как показано в [12], для функции $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k^4 \arccos x)}{k^2}$, принадлежащей классу Липшица $\operatorname{Lip}\frac{1}{8}$, предел последовательности частичных сумм $S_n(f)(x)$ на концах отрезка $[-1;1]$ не существует.

Автор благодарит д.ф.-м.н. И. И. Шарапудинова за постановку задачи и ценные советы при ее решении.

Литература

1. *Chui C. K., Mhaskar H. N.* On Trigonometric wavelets // Constructive Approximation.—1993.—Vol. 9.—P. 167–190.
2. *Kilgore T., Prestin J.* Polynomial wavelets on an interval // Constructive Approximation.—1996.—Vol. 12 (1)—P. 1–18.

3. *Davis P. J.* Interpolation and Approximation.—N. Y.: Dover Publ. Inc., 1973.
4. *Fischer B. and Prestin J.* Wavelet based on orthogonal polynomials // Math. Comp.—1997.—Vol. 66.—P. 1593–1618.
5. *Fischer B., Themistoclakis W.* Orthogonal polynomial wavelets // Numerical Algorithms.—2002.—Vol. 30.—P. 37–58.
6. *Capobiancho M. R., Themistoclakis W.* Interpolating polynomial wavelet on $[-1, 1]$ // Advanced Comput. Math.—2005.—Vol. 23.—P. 353–374.
7. *Dao-Qing Dai, Wei Lin* Orthonormal polynomial wavelets on the interval // Proc. Amer. Math. Soc.—2005.—Vol. 134 (5).—P. 1383–1390.
8. *Mohd F., Mohd I.* Orthogonal functions based on Chebyshev polynomials // Matematika.—2011.—Vol. 27, № 1.—P. 97–107.
9. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.—М.: Физматлит, 1962.—500 с.
10. *Яхнин Б. М.* О функциях Лебега разложений в ряды по полиномам Якоби для случаев $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ // Успехи мат. наук.—1958.—Т. 13, вып. 6 (84).—С. 207–211.
11. *Яхнин Б. М.* Приближение функций класса Lip_α частными суммами ряда Фурье по многочленам Чебышева 2-го рода // Изв. вузов. Математика.—1963.—№ 1.—С. 172–178.
12. *Бернштейн С. Н.* О многочленах, ортогональных на конечном интервале.—Харьков: Гос. науч.-тех. изд-во Украины, 1937.—128 с.

Статья поступила 13 мая 2015 г.

Султанахмедов Мурад Салихович
Дагестанский научный центр РАН,
научный сотрудник отдела математики и информатики,
РОССИЯ, 367000, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45
E-mail: `sultanakhmedov@gmail.com`

APPROXIMATIVE PROPERTIES OF THE CHEBYSHEV WAVELET SERIES OF THE SECOND KIND

Sultanakhmedov M. S.

The wavelets and scaling functions based on Chebyshev polynomials and their zeros are introduced. The constructed system of functions is proved to be orthogonal. Using this system, an orthonormal basis in the space of square-integrable functions is built. Approximative properties of partial sums of corresponding wavelet series are investigated.

Key words: polynomial wavelets, Chebyshev polynomials of second kind, orthogonality, Christoffel–Darboux formula, function approximation, wavelet series.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 3, С. 65–74

УДК **517.54+517.518**

ОЦЕНКИ НА МОДУЛИ СЕМЕЙСТВ КРИВЫХ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ С ВЕСОВЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ (p,q)-ИСКАЖЕНИЕМ

М. В. Трямкин

Семёну Самсоновичу Кутателадзе
к 70-летнему юбилею

Мы формулируем аналоги неравенств Полецкого и Вяйсяля для отображений с $(\theta,1)$-весовым ограниченным (p,q)-искажением без дополнительного предположения об $\mathscr{N}$-свойстве Лузина.

Ключевые слова: отображение с ограниченным весовым (p,q)-искажением, модуль семейства кривых, функция Полецкого.

1. Введение

Понятие модуля семейства кривых на плоскости было введено в 1950 г. Л. Альфорсом и А. Бьерлингом [1], а затем распространено на многомерные пространства Б. Фугледе [2] и Б. В. Шабатом [3]. На языке этого понятия было сформулировано одно из эквивалентных описаний квазиконформных отображений, в связи с чем метод модулей приобрел важное значение в работе с этим классом отображений, позволив найти альтернативный подход к их изучению. Необходимость в таком подходе была вызвана отсутствием в многомерных пространствах теоремы Римана.

В 60-е годы прошлого века Ю. Г. Решетняк начал систематическое исследование отображений с ограниченным искажением, представляющих собой неоднолистный аналог квазиконформных отображений (подробное изложение содержится в монографии [4]). Пусть Ω — область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Отображение $f = (f_1,\dots,f_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если для почти всех $x \in \Omega$ выполняется неравенство $|Df(x)|^n \leqslant KJ(x,f)$, где $K \in [1,\infty)$ — постоянная, $Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j=1,\dots,n}$ — матрица Якоби, $|Df(x)|$ и $J(x,f)$ — ее операторная норма и определитель соответственно.

Основополагающий топологический результат Ю. Г. Решетняка заключается в том, что всякое непостоянное отображение с ограниченным искажением непрерывно, открыто и дискретно (см. [4, гл. 2, § 6]).

Впервые метод модулей к исследованию отображений с ограниченным искажением применил Е. А. Полецкий в 1970 г. [5]. Опираясь на упомянутые топологические характеристики, Е. А. Полецкий с помощью процедуры поднятия путей установил свойства

---

[1] Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-00552, и Совета по грантам Президента Российской Федерации, проект № НШ-2263.2014.1.

некоторого специального отображения, известного сегодня как функция Полецкого. Это позволило показать, что для отображений с ограниченным искажением модуль образа семейства кривых не превосходит модуля прообраза [5, теорема 1]. Последнее утверждение в наши дни называется неравенством Полецкого. В той же работе [5] получено некоторое улучшение этого неравенства в нормальных областях (см. [5, теорема 2]). Полезная интерпретация последнего была получена Ю. Вяйсяля [6, 3.1] и называется в литературе неравенством Вяйсяля. Немногим ранее были установлены аналогичные оценки для емкости (см. [7, 8]). Отметим, однако, что модульные неравенства суть более общие, чем соответствующие емкостные (см., например, [9, пример 1]).

Оценки для модуля и емкости играют ключевую роль в исследовании поведения отображения на границе, в теории распределения значений в духе Неванлинны (теоремы типа Лиувилля и Пикара, устранение особенностей) (см. [10]), связи дилатации с минимальной кратностью ветвления и др. Кроме того, модульная техника нашла применение в метрических пространствах с мерой, что привело к рассмотрению так называемых пространств Левнера (см., например, [11]).

Метод модулей, как показывает ряд недавно вышедших работ (см., например, монографию [12]), а также статьи [13–17], продолжает оставаться основным инструментом в изучении различных обобщений отображений с ограниченным искажением. В книге [12] рассматриваются Q-гомеоморфизмы с функцией Q из различных классов (интегрируемые, с ограниченным средним и с ограниченным конечным колебанием), отображения с конечным искажением длины и с конечным искажением площади, и для них устанавливаются результаты о дифференцируемости, поведении на границе, устранении особенностей, нормальных семействах и пр. В статьях [13, 14] емкостные оценки установлены для некоторых обобщений отображений с ограниченным искажением (в частности, на группах Карно) с требованием $\mathscr{N}$-свойства Лузина. В работе [15] установлены модульные и емкостные неравенства для отображений с конечным искажением при минимальных условиях регулярности в предположении о том, что исходное отображение также удовлетворяет $\mathscr{N}$-свойству. В статье [16] аналогичные неравенства получены для отображений с конечным (p,q)-искажением длины. В [17] оценка на модуль доказана для некоторого специального класса отображений, обладающих следующими свойствами: открытость, дискретность, дифференцируемость почти всюду, $\mathscr{N}$- и $\mathscr{N}^{-1}$-свойство Лузина, и так называемое *свойство абсолютной непрерывности в обратном направлении.*

Задача нашей работы — установить модульные неравенства для естественного обобщения класса отображений с ограниченным искажением без некоторых аналитических предположений, характерных для вывода результатов упомянутых выше работ. В настоящей статье основным является следующее

Определение 1 [18]. Пусть $\theta, \sigma\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ — локально суммируемые функции (называемые *весовыми*) такие, что $\theta > 0$ и $\sigma > 0$ почти всюду. Отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с (θ,σ)-весовым ограниченным (p,q)-искажением*, $n-1 < q \leqslant p < \infty$, если:

1) f непрерывно, открыто и дискретно;

2) f принадлежит классу Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$;

3) $J(x,f) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \Omega$;

4) отображение f имеет *конечное искажение*:

$$\text{для почти всех } x \in \Omega \text{ равенство } J(x,f) = 0 \text{ влечет } Df(x) = 0;$$

5) функция локального (θ,σ)-весового q-искажения

$$\Omega \ni x \mapsto K_q^{\theta,\sigma}(x,f) = \begin{cases} \frac{\theta^{\frac{1}{q}}(x)|Df(x)|}{\sigma^{\frac{1}{p}}(f(x))J(x,f)^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } J(x,f) \neq 0; \\ 0, & \text{если } J(x,f) = 0, \end{cases}$$

принадлежит классу $L_\varkappa(\Omega)$, где $\varkappa$ находится из условия $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\varkappa = \infty$ при $q = p$).

Через $K_{q,p}^{\theta,\sigma}(f;\Omega)$ обозначим величину $\|K_q^{\theta,\sigma}(\cdot,f) \mid L_\varkappa(\Omega)\|$.

В этом определении наличие пункта 1) связано с тем, что при $q \in (n-1,n)$ отображение может и не обладать требуемыми топологическими свойствами. Отметим, что при $\theta = \sigma \equiv 1$ и $p = q = n$ мы получаем отображения, введенные Ю. Г. Решетняком.

В работе [18] получены емкостные неравенства для введенного класса отображений без требования $\mathscr{N}$-свойства Лузина. Подчеркнем, что ранее модульные и емкостные неравенства устанавливались в предположении, что отображение обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина, которое заключается в том, что образ множества меры нуль также имеет меру нуль. Это требование необходимо было для того, чтобы образ множества точек ветвления имел нулевую меру. В настоящей статье мы доказываем модульные неравенства без дополнительного предположения об $\mathscr{N}$-свойстве Лузина. Это оказывается возможным благодаря следующему замечательному факту, установленному в статье [19] (см. также [18–22]): частные производные функции Полецкого обращаются в нуль почти всюду на образе множества точек ветвления. В § 3 мы скажем об этом подробнее. Этот факт использовался в работе [18] для получения оценок на емкости. Отметим, что при $q \in (n-1,n)$ отображение f не обязательно обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина, что продемонстрировано в [23].

Во всех наших последующих рассмотрениях отображение f имеет $(\theta,1)$-весовое ограниченное (p,q)-искажение, т. е. $\sigma \equiv 1$.

Полный вариант этой заметки с подробным изложением доказательств будет опубликован в [24].

2. Предварительные сведения

2.1. Всюду в тексте символ Ω обозначает область (т. е. открытое связное множество) в пространстве $\mathbb{R}^n$, символ m_n — n-мерную меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. Для области $U \subset \mathbb{R}^n$ запись $U \Subset \Omega$ означает, что множество U ограничено и $\overline{U} \subset \Omega$.

Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, $U \Subset \Omega$, $y \notin f(\partial U)$. Символом $\mu(y,f,U)$ мы будем обозначать *степень отображения f в точке y*. Подробную информацию об этом понятии можно найти, например, в [4, 2.1] и [10, I.4]. Если $\mu(y,f,U) > 0$ для любой области $U \Subset \Omega$ и любой точки $y \in f(U) \setminus f(\partial U)$, то говорят, что отображение f *сохраняет ориентацию*.

Рассмотрим непрерывное открытое и дискретное отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ и точку $x \in \Omega$. Тогда существует область $V \Subset \Omega$ такая, что $x \in V$ и $\overline{V} \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$. Если $V' \Subset \Omega$ — другая область с таким свойством, то можно показать (см. [10, с. 18]), что $\mu(f(x),f,V) = \mu(f(x),f,V')$. Поэтому равенство $i(x,f) = \mu(f(x),x,U)$ корректно определяет величину $i(x,f)$, называемую *локальным индексом отображения f в точке x*.

Область $D \Subset \Omega$ называется *нормальной* для непрерывного открытого и дискретного отображения $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, если $f(\partial D) = \partial f(D)$. Если $x \in \Omega$ и D — нормальная область такая, что $D \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$, то D называется *нормальной окрестностью* точки x. Согласно [10, I.4.9] всякая точка $x \in \Omega$ имеет нормальную окрестность.

Отметим, что если D — нормальная область для отображения f, то $\mu(y, f, D)$ не зависит от $y \in f(D)$ (см. [10, с. 18]). Эту постоянную мы будем обозначать $\mu(f, D)$.

Точка $x \in \Omega$ называется *точкой ветвления* непрерывного отображения $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, если f не является гомеоморфизмом ни в какой окрестности точки x. Множество всех точек ветвления отображения f обозначим символом B_f. Заметим, что $x \in B_f$ тогда и только тогда, когда $i(x, f) \geqslant 2$.

Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, и $U \subset \Omega$. ***Функцией кратности*** называется отображение $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto N(y, f, U) = \#\{f^{-1}(y) \cap U\}$. Обозначим также: $N(f, U) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} N(y, f, U)$.

2.2. Здесь мы приведем понятия и утверждения, необходимые для описания аналитических свойств отображений.

Пусть $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — функция класса $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Если существует функция $v_i \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, такая, что для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int\limits_{\Omega} v_i(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

то v_i называется *обобщенной частной производной* функции u и обозначается через $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Функция $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, имеющая в области Ω обобщенные частные производные по всем переменным, принадлежит *пространству Соболева* $W_p^1(\Omega)$, $p \geqslant 1$, если $u \in L_p(\Omega)$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_p(\Omega)$ для каждого $i = 1, \ldots, n$.

Отображение $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $W_p^1(\Omega)$ $(W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega))$, если все $f_i \in W_p^1(\Omega)$ (все $f_i \in W_p^1(D)$ для любой области $D \Subset \Omega$). Через $Df(x)$, $|Df(x)|$ и $J(x, f)$ мы обозначаем матрицу Якоби $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j=1,\ldots,n}$, ее операторную норму $\sup_{|h|=1} |Df(x)h|$ и якобиан $\det Df(x)$ соответственно.

Для $(n \times n)$-матрицы $M = (a_{ij})$ через $\operatorname{adj} M$ мы обозначаем $(n \times n)$-матрицу, транспонированную к матрице (A_{ij}), где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Введем проекцию $\pi_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$, которая точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ставит в соответствие точку $\pi_j(x) = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$. Обозначим $\bar{x}_j = \pi_j(x)$. Точку $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (\bar{x}_j, x_j)$. Говорят, что непрерывное отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* $\mathrm{ACL}(\Omega)$, если для любого $j = 1, \ldots, n$ отображение $x_j \mapsto f(\bar{x}_j, x_j)$ при почти всех $\bar{x}_j \in \pi_j(\Omega)$ абсолютно непрерывно на любом отрезке $[a, b]$ таком, что $\pi_j(\Omega) \times [a, b] \subset \Omega$.

Известно (см. [25, 26.4]), что если $f \in \mathrm{ACL}(\Omega)$, то f имеет почти всюду в Ω обычные частные производные, которые будут борелевскими функциями.

Отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* $\mathrm{ACL}^p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, если $f \in \mathrm{ACL}(\Omega)$ и все частные производные f принадлежат классу $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Предложение 1 [10, I.1.2]. *Отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $\mathrm{ACL}^p(\Omega)$ тогда и только тогда, когда f непрерывно и $f \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$. При этом обобщенные и обычные частные производные совпадают почти всюду.*

2.3. Этот пункт посвящен понятию модуля семейства кривых, которое мы обобщим нужным нам образом.

Кривая в пространстве $\mathbb{R}^n$ — это непрерывное отображение $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$, где I — промежуток в $\mathbb{R}$ (т. е. множество вида $\langle a, b \rangle$, где каждая из угловых скобок может быть круглой или квадратной, $a \leqslant b$, $a, b \in \mathbb{R}$; допускаются также бесконечные промежутки). Кривая α называется *замкнутой* (*открытой*), если интервал I компактен (открыт). Обозначим $|\alpha| = \alpha(I)$. Запись $\gamma' \subset \gamma$ будет означать, что кривая γ' есть сужение кривой γ на подынтервал или точку.

Если $\alpha\colon I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — замкнутая кривая, то ее *длиной* назовем величину

$$\ell(\alpha) = \sup \sum_{i=1}^{l} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i+1})|,$$

где точная верхняя грань берется по всем конечным разбиениям $a = t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_l \leqslant t_{l+1} = b$. Если кривая α не замкнута, то положим ее длину равной $\ell(\alpha) = \sup \ell(\alpha|_J)$, где супремум берется по всем замкнутым подынтервалам J интервала I.

Кривая $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ называется *спрямляемой*, если $\ell(\alpha) < \infty$. Кривая называется *локально спрямляемой*, если каждая ее замкнутая подкривая спрямляема.

Рассмотрим замкнутую кривую $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Предположим, что она спрямляема. Определим функцию $s_\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ равенством $s_\alpha(t) = \ell(\alpha|_{[a,t]})$. Для спрямляемой кривой α существует единственная кривая $\alpha^0\colon [0, \ell(\alpha)] \to \mathbb{R}^n$, полученная из α монотонно возрастающей заменой параметра, такая, что $s_{\alpha^0}(t) = t$ и $\alpha = \alpha^0 \circ s_\alpha$ [25, 2.4]. Кривая α^0 называется *натуральной параметризацией* кривой α.

Пусть Γ — семейство кривых в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Борелевская функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для Γ, если

$$\int_\gamma \rho \, ds \geqslant 1$$

для каждой локально спрямляемой кривой $\gamma \in \Gamma$. Совокупность всех допустимых функций обозначаем $\operatorname{adm} \Gamma$. Для весовой функции $\omega\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ и $p \in [1, \infty)$ определим *ω-весовой p-модуль* семейства Γ формулой

$$\operatorname{mod}_p^\omega \Gamma = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p \omega \, dm_n.$$

Свойства весовой функции мы будем оговаривать отдельно (как минимум, предполагается, что она локально суммируема и почти всюду $\omega > 0$). При $\omega \equiv 1$ мы получаем обычное определение p-модуля, и вместо $\operatorname{mod}_p^1 \Gamma$ будем писать $\operatorname{mod}_p \Gamma$. Если $\operatorname{adm} \Gamma = \varnothing$ (этот случай реализуется только тогда, когда в семействе Γ есть хотя бы одна кривая, задающая постоянное отображение), то полагаем $\operatorname{mod}_p^\omega \Gamma = \infty$.

Если Γ — семейство кривых в области Ω и $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, то через $f(\Gamma)$ мы обозначаем семейство кривых $f \circ \gamma$, где $\gamma \in \Gamma$.

Замечание 1. Как следует из определения модуля, кривые, которые не являются локально спрямляемыми, можно не учитывать. Точнее, если Γ — семейство кривых, и Γ_1 — семейство таких $\gamma \in \Gamma$, что γ локально спрямляема, то $\operatorname{mod}_p^\omega(\Gamma) = \operatorname{mod}_p^\omega(\Gamma_1)$. В связи с этим, допуская известную вольность, мы будем говорить, что семейство кривых, которые не являются локально спрямляемыми, имеет нулевой модуль.

Пусть α — спрямляемая замкнутая кривая в $\mathbb{R}^n$. Отображение $g\colon |\alpha| \to \mathbb{R}^n$ называется *абсолютно непрерывным на α*, если $g \circ \alpha^0$ абсолютно непрерывно на $[0, \ell(\alpha)]$.

3. Аналог леммы Полецкого

В доказательстве модульных неравенств проводятся рассуждения, обосновывающие возможность параметризации кривой некоторым специальным образом. Впервые эти рассуждения были реализованы в [5, лемма 6], которая в дальнейшем получила название *леммы Полецкого*. Нам потребуется ее аналог. Прежде чем его сформулировать, выясним содержание понятия абсолютной преднепрерывности, которое заключает в себе описание специального типа параметризации.

Предположим, что $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое дискретное отображение. Пусть $\beta\colon I_0 \to \mathbb{R}^n$ — замкнутая спрямляемая кривая, и $\alpha\colon I \to \Omega$ — кривая такая, что $f \circ \alpha \subset \beta$, т. е. $I \subset I_0$. Если функция $s_\beta\colon I_0 \to [0, \ell(\beta)]$ постоянна на некотором интервале $J \subset I$, то и отображение β постоянно на J. В свою очередь, ввиду дискретности f отображение α также постоянно на J. Следовательно, существует единственное отображение $\alpha^*\colon s_\beta(I) \to \Omega$ такое, что $\alpha = \alpha^* \circ s_\beta|_I$. Легко видеть, что α^* непрерывно и $f \circ \alpha^* \subset \beta^0$. Кривая α^* называется *f-представителем кривой α (относительно β)*, если $\beta = f \circ \alpha$. Предположим теперь, что $\beta = f \circ \alpha$. Отображение f называется *абсолютно преднепрерывным на α*, если α^* абсолютно непрерывно.

Приведем аналог леммы Полецкого.

Лемма 1. *Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta, 1)$-весовым ограниченным (p, q)-искажением, $n - 1 < q \leqslant p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Предположим, что Γ — семейство кривых в Ω такое, что для любой кривой $\gamma \in \Gamma$ выполнено следующее: кривая $f \circ \gamma$ локально спрямляема, и γ имеет замкнутую подкривую α, на которой f не абсолютно преднепрерывно. Тогда $\operatorname{mod}_{p'} f(\Gamma) = 0$, где $p' = \frac{p}{p-(n-1)}$.*

В доказательстве этой леммы большое значение имеют свойства функции Полецкого, которая определяется следующим образом. Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое дискретное отображение, сохраняющее ориентацию, $U \subset \Omega$ — нормальная область, и $N = \mu(f, U)$. На множестве $V = f(U)$ определим отображение $g_U\colon V \to \mathbb{R}^n$, называемое *функцией Полецкого*, равенством

$$V \ni y \mapsto g_U(y) = \frac{1}{N} \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap U} i(x, f)x. \tag{1}$$

Необходимые нам свойства отображения (1) будут приведены в предложении 2, для формулировки которого нужно сделать следующее замечание. Поскольку отображение $f\colon \Omega \to \Omega' = f(\Omega)$ принадлежит классу Соболева, то оно аппроксимативно дифференцируемо почти всюду. Следовательно, существует борелевское множество $\Sigma \subset \Omega$, $m_n(\Sigma) = 0$, вне которого f обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина. Обозначим: $Z = \{x \in \Omega \setminus \Sigma\colon J(x, f) = 0\}$. С точностью до множества меры нуль множество Z можно считать борелевским. Кроме того, $m_n(Z) = 0$. Также можно считать, что $B_f \subset Z \cup \Sigma$, так как $Df(x) = 0$ в точках $x \in B_f$, где $Df(x)$ существует.

Дополнение $\Omega \setminus \Sigma$ можно разложить на счетную совокупность дизъюнктных измеримых множеств F_k, $k \in \mathbb{N}$, таких, что $\cup F_k = \Omega \setminus \Sigma$ и отображение $f|_{F_k} : F_k \to \Omega'$ липшицево для всех $k \in \mathbb{N}$. Каждое множество $F_k \setminus Z$ представимо в виде объединения счетного семейства дизъюнктных измеримых множеств F_{km}, $m \in \mathbb{N}$, таких, что отображение $f|_{F_{km}}\colon F_{km} \to \Omega'$ билипшицево для всех $m \in \mathbb{N}$. Согласно теореме Радемахера отображения $f|_{F_{km}}\colon F_{km} \to \Omega'$ дифференцируемы почти всюду на области определения, а в силу теоремы Лебега о дифференцировании аддитивной функции множества F_{km} можно считать состоящими только из точек плотности 1. Переобозначим семейство дизъюнктных множеств $\{F_{km}\}$ как $\{E_l\}$. Мы получим разложение

$$\Omega = \Sigma \cup Z \cup \bigcup_{l \in \mathbb{N}} E_l,$$

в правой части которого все множества дизъюнктны. Ему соответствует разложение в образе:

$$\Omega' = Z' \cup \Sigma' \cup \bigcup_{l\in\mathbb{N}} E'_l,$$

где $Z' = f(\Sigma)$, $\Sigma' = f(Z)$, $E'_l = f(E_l)$, причем $m_n(\Sigma') = 0$, а Z' может иметь положительную m_n-меру. Можно считать, что $f(B_f) \subset Z' \cup \Sigma'$.

Теперь мы готовы сформулировать свойства функции Полецкого.

Предложение 2 [19, теорема 1]. *Предположим, что непрерывное открытое и дискретное отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $q > n-1$, $J(x,f) \geqslant 0$ почти всюду, и f имеет конечное коискажение: $\operatorname{adj} Df = 0$ почти всюду на множестве $Z = \{x \in \Omega\colon J(x,f) = 0\}$. Тогда*

1) *f сохраняет ориентацию;*

2) *отображение g_U, определенное равенством* (1), *непрерывно, принадлежит классу Соболева $W^1_1(V)$ и имеет конечное искажение, т. е. $Dg_U(y) = 0$ почти всюду на множестве нулей якобиана $\det Dg_U(y)$. Более того, $f((\Sigma \cup Z) \cap U) \subset \{y \in U\colon Dg_U(y) = 0\}$, в частности, $f(B_f \cap U) \subset \{y \in U\colon Dg_U(y) = 0\}$.*

Замечание 2. Отображение с $(\theta, 1)$-весовым ограниченным (p,q)-искажением в силу конечности искажения имеет конечное коискажение, и поэтому согласно п. 3 определения 1 и предложению 2 сохраняет ориентацию.

Также нам потребуется следующее

Предложение 3 [20, следствие 4]. *Пусть гомеоморфизм $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$ областей пространства $\mathbb{R}^n$ принадлежит классу Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $n-1 \leqslant q \leqslant \infty$, и имеет конечное коискажение: $\operatorname{adj} D\varphi = 0$ почти всюду на множестве $Z = \{x \in \Omega\colon J(x,\varphi) = 0\}$. Тогда обратный гомеоморфизм φ^{-1} принадлежит классу Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega')$ и имеет конечное искажение: $D\varphi^{-1}(y) = 0$ почти всюду на множестве $Z' = \{y \in \Omega'\colon J(y,\varphi^{-1}) = 0\}$.*

Для того чтобы доказать лемму 1, мы сначала устанавливаем следующие леммы 2 и 3.

Лемма 2. *Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta,1)$-весовым ограниченным (p,q)-искажением, $n-1 < q \leqslant p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Тогда отображение g_U, определенное равенством* (1), *принадлежит классу $\mathrm{ACL}^{p'}(V)$, где $p' = \frac{p}{p-(n-1)}$.*

Перед тем как сформулировать лемму 3, фиксируем область $D \Subset \Omega$. Удалим из нее множество точек ветвления. Тогда для всякого $x \in D \setminus B_f$ найдется число $r(x) > 0$ такое, что открытый шар $B(x, r(x)) \subset D \setminus B_f$ и f инъективно на $B(x, r(x))$. В силу теоремы Безиковича в семействе $\{B(x,r(x))\colon x \in D \setminus B_f\}$ найдется счетный набор шаров $\{B_j\}$ таких, что

$$D \setminus B_f \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j, \quad \sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_{B_j}(x) \leqslant C(n),$$

где последнее неравенство выполняется для любой точки $x \in D \setminus B_f$, а постоянная $C(n)$ зависит только от размерности пространства.

Согласно предложению 3 обратные отображения $h_j = (f|_{B_j})^{-1}\colon f(B_j) \to B_j$ принадлежат классу Соболева $W^1_1(f(B_j))$ и имеют конечное искажение. Через A_j обозначим борелевское множество точек $y \in f(B_j)$, в которых определена матрица Якоби Dh_j. Поскольку $h_j \in W^1_1$ принадлежит классу Соболева, $m_n(f(B_j) \setminus A_j) = 0$. Положив $Dh_j(y) = 0$ в точках $y \in f(B_j) \setminus A_j$, получим борелевскую функцию $|Dh_j|\colon f(B_j) \to \mathbb{R}$. Определим борелевскую функцию $\rho_0 = \sup_{j\in\mathbb{N}} |Dh_j| \chi_{f(B_j)}$.

Положим

$$B_f^k = \{x \in D \colon i(x,f) = k\}, \quad k \geqslant 2.$$

Каждая точка $x \in B_f^k$ обладает нормальной окрестностью $U \subset D$. Покроем множество B_f^k такими нормальными окрестностями U_{ki}, $i \in \mathbb{N}$, и обозначим через g_{ki} отображения $g_{U_{ki}}$, определенные формулой (1). Через G_{ki} обозначим борелевское множество точек $y \in f(U_{ki})$, в которых определена матрица Якоби Dg_{ki}. Поскольку отображение g_{ki} соболевское, $m_n(f(U_{ki}) \setminus G_{ki}) = 0$. Положив $Dg_{ki}(y) = 0$ в точках $y \in f(U_{ki}) \setminus G_{ki}$, получим борелевские функции $|Dg_{ki}| \colon f(U_{ki}) \to \mathbb{R}$. Определим борелевские функции $\eta_{ki} = |Dg_{ki}|\chi_{f(U_{ki})}$. Введем также борелевское множество

$$F = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (f(B_j) \setminus A_j) \cup \bigcup_{\substack{k\geqslant 2\\ i\in\mathbb{N}}} (f(U_{ki}) \setminus G_{ki}).$$

Легко видеть, что $m_n(F) = 0$.

Лемма 3 (ср. с [10, II.7.2]). *Пусть $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta,1)$-весовым ограниченным (p,q)-искажением, $n-1 < q \leqslant p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Через Γ_0 обозначим семейство замкнутых кривых α в области D таких, что либо кривая $f\circ\alpha$ неспрямляема, либо $f\circ\alpha$ спрямляема и по крайней мере одно из следующих условий неверно:*

1) $\int_{f\circ\alpha} \chi_F \, ds = 0$;

2) $\int_{f\circ\alpha} \rho_0 \, ds < \infty$;

3) *если β — замкнутая подкривая кривой α и $|\beta| \subset B_j$, то h_j абсолютно непрерывно на $f\circ\beta$;*

4) *если β — замкнутая подкривая кривой α и $|\beta| \subset U_{ki}$, то g_{ki} абсолютно непрерывно на $f\circ\beta$;*

5) *если β — замкнутая подкривая кривой α и $|\beta| \subset U_{ki}$, то $\int_{f\circ\beta} \eta_{ki} \, ds < \infty$.*

Тогда $\operatorname{mod}_{p'} f(\Gamma_0) = 0$, где $p' = \frac{p}{p-(n-1)}$.

4. Модульные неравенства

Сформулируем аналог неравенства Полецкого (ср. с [5, теорема 1]).

Теорема 1. *Пусть $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta,1)$-весовым ограниченным (p,q)-искажением, $n-1 < q \leqslant p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Если Γ — семейство кривых в области Ω, то справедливо неравенство*

$$(\operatorname{mod}_{p'} f(\Gamma))^{1/p'} \leqslant K_{p,q}^{\theta,1}(f;\Omega)^{n-1} (\operatorname{mod}_{q'}^{\omega} \Gamma)^{1/q'},$$

где $p' = \frac{p}{p-(n-1)}$, $q' = \frac{q}{q-(n-1)}$.

Неравенство Полецкого имеет обобщение, известное в литературе как неравенство Вяйсяля [6, 3.1]. Сформулируем его аналог.

Теорема 2. *Пусть $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta,1)$-весовым ограниченным (p,q)-искажением, $n-1 < q \leqslant p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Пусть Γ — семейство кривых в Ω, Γ' — семейство кривых в $\mathbb{R}^n$, и m — положительное целое число. Предположим, что выполняется следующее условие: для* *каждой кривой $\beta\colon I \to \mathbb{R}^n$ в Γ' существуют кривые $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ в Γ такие, что для всех $x \in \Omega$ и $t \in I$ равенство $\alpha_j(t) = x$ справедливо не более чем для $i(x, f)$ значений индекса j. Тогда*

$$(\mathrm{mod}_{p'} \Gamma')^{1/p'} \leqslant \frac{K^{\theta,1}_{p,q}(f;\Omega)^{n-1}}{m^{1/p'}} (\mathrm{mod}^{\omega}_{q'} \Gamma)^{1/q'},$$

где $p' = \frac{p}{p-(n-1)}$, $q' = \frac{q}{q-(n-1)}$.

Из теоремы 2 выводим (ср. с [5, теорема 2])

Следствие 1. *Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta, 1)$-весовым ограниченным (p,q)-искажением, $n - 1 < q \leqslant p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Если D — нормальная область для f, Γ' — семейство кривых в $f(D)$, Γ — семейство кривых α в D такое, что $f \circ \alpha \in \Gamma'$, то*

$$(\mathrm{mod}_{p'} \Gamma')^{1/p'} \leqslant \frac{K^{\theta,1}_{p,q}(f;\Omega)^{n-1}}{N(f,D)^{1/p'}} (\mathrm{mod}^{\omega}_{q'} \Gamma)^{1/q'}.$$

Литература

1. *Ahlfors L. and Beurling A.* Conformal invariants and function-theoretic null-sets // Acta Math.—1950.—Vol. 83.—P. 101–129.
2. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math.—1957.—Vol. 98.—P. 171–219.
3. *Shabat B. V.* The modulus method in space // Dokl. Akad. Nauk SSSR.—1960.—Vol. 130.—P. 1210–1213; English transl.: Soviet Math. Dokl.—1960.—Vol. 1.—P. 165–168.
4. *Reshetnyak Yu. G.* Space Mappings with Bounded Distortion.—Providence (R I): American Math. Soc., 1989.—(Translation of Math. Monogr.; Vol. 73).
5. *Poletskiĭ E. A.* The modulus method for nonhomeomorphic quasiconformal mappings // Mat. Sb.—1970.—Vol. 83 (125).—P. 261–272; English transl.: Math. USSR Sb.—1970.—Vol. 12.
6. *Väisälä J.* Modulus and capacity inequalities for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I.—1972.—Vol. 509.—P. 1–14.
7. *Martio O., Rickman S. and Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sc. Fenn. Ser. A I.—1969.—Vol. 448.—P. 5–40.
8. *Martio O.* A capacity inequality for quasiregular mappings // Ann. Sc. Fenn. Ser. A I.—1970.—Vol. 474.—P. 1–18.
9. *Poletskiĭ E. A.* On the removal of singularities of quasiconformal mappings // Mat. Sb.—1973.—Vol. 92 (134).—P. 242–256; English transl.: Math. USSR Sb.—1973.—Vol. 21.
10. *Rickman S.* Quasiregular Mappings.—Berlin a. o.: Springer-Verlag, 1993.
11. *Heinonen J. and Koskela P.* Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry // Acta Math.—1998.—Vol. 181.—P. 1–41.
12. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory.—N. Y.: Springer, 2009.
13. *Troyanov M. and Vodop'yanov S. K.* Liouville type theorems for mappings with bounded (co)-distortion // Ann. Inst. Fourier.—2002.—Vol. 52, № 6.—P. 1753–1784.
14. *Vodop'yanov S. K. and Ukhlov A.* Mappings with bounded (P, Q)-distortion on Carnot groups // Bull. Sci. Math.—2010.—Vol. 134, № 6.—P. 605–634.
15. *Koskela P. and Onninen J.* Mappings of finite distortion: Capacity and modulus inequalities // J. Reine Angew. Math.—2006.—Vol. 599.—P. 1–26.
16. *Salimov R. and Sevost'yanov E.* The Poletskii and Väisälä inequalities for the mappings with (p, q)-distortion // Complex Variables and Elliptic Equations: An International J.—2014.—Vol. 59, № 2.—P. 217–231.
17. *Sevost'yanov E.* About one modulus inequality of the Väisälä type.—2013.—URL: http://arxiv.org/abs/1204.3810v4.—(Preprint).
18. *Baykin A. N. and Vodop'yanov S. K.* Capacity estimates, Liouville's theorem, and singularity removal for mappings with bounded (p, q)-distortion // Siberian Math. J.—2015.—Vol. 56, № 2.—P. 237–261.

19. *Vodop'yanov S. K.* On the regularity of the Poletskii function under weak analytic assumptions on the given mapping // Dokl. Ross. Akad. Nauk.—2014.—Vol. 455, № 2.—P. 130–134; English transl.: Dokl. Math.—2014.—Vol. 89, № 2.—P. 157–161.
20. *Vodop'yanov S. K.* On regularity of mappings inverse to Sobolev mappings // Dokl. Ross. Akad. Nauk.—2008.—Vol. 423, № 5.—P. 592–596; English transl.: Dokl. Math.—2008.—Vol. 78, № 3.—P. 891–895.
21. *Vodop'yanov S. K.*, Mappings of finite distortion and Sobolev classes of functions // Dokl. Ross. Akad. Nauk.—2011.—Vol. 440, № 3.—P. 301–305; English transl.: Dokl. Math.—2011.—Vol. 84, № 2.—P. 640–644.
22. *Vodop'yanov S. K.* Regularity of mappings inverse to Sobolev mappings // Sb.: Mathematics.—2012.—Vol. 203, № 10.—P. 1383–1410.
23. *Ponomarev S. P.* On the N-property of homeomorphisms of the class W_p^1 // Sibirsk. Mat. Zh.—1987.—Vol. 28, № 2.—P. 140–148.
24. *Tryamkin M. V.* Modulus inequalities for mappings with weighted bounded (p,q)-distortion // Siberian Math. J.—2015.—Vol. 56, № 6.—(To appear).
25. *Väisälä J.* Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings.—Berlin: Springer-Verlag, 1971.

Статья поступила 28 августа 2015 г.

Трямкин Максим Владимирович
Новосибирский государственный университет,
ассистент кафедры высшей мат-ки физического факультета
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2
E-mail: `maxtryamkin@yandex.ru`

ESTIMATES OF MODULI OF CURVE FAMILIES FOR MAPPINGS WITH WEIGHTED BOUNDED (p,q)-DISTORTION

Tryamkin M. V.

We state the analogs of Poletskiĭ's and Väisälä's inequalities for mappings with $(\theta,1)$-weighted bounded (p,q)-distortion without the additional assumption that the mappings enjoy Lusin's $\mathscr{N}$-property.

Key words: mapping with weighted bounded (p,q)-distortion, modulus of a curve family, Poletskiĭ's function.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 3, С. 75–83

УДК **517.518.2**

ПЛОТНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА ЛИЗОРКИНА В ГРАНД-ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

С. М. Умарходжиев

Семёну Самсоновичу Кутателадзе
к его семидесятилетию

Доказана плотность пространства Лизоркина в некотором подпространстве гранд-пространства Лебега на открытом множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: гранд-пространство Лебега, пространство Лизоркина, плотность бесконечно дифференцируемых функций.

1. Введение

Рассматриваются модификации пространств Лебега, называемые гран-пространствами Лебега. Такие пространства $L^{p)}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, по ограниченному множеству $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ввели в 1992 г. T. Iwaniec и C. Sbordone [11]. Операторы гармонического анализа интенсивно исследовались в таких пространствах в последние годы и они продолжают привлекать внимание исследователей в связи с различными их приложениями (см. [5–10], [13–15]).

В статьях [2, 17, 18, 20] предложен подход, позволяющий ввести гранд-пространства Лебега $L^{p)}_a(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $a \in L^p(\Omega)$, на открытых, не обязательно ограниченных, множествах $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Действия максимального оператора Харди — Литтлвуда, операторов Кальдерона — Зигмунда и потенциала Рисса в гранд-пространства Лебега $L^{p)}_a(\Omega)$ исследованы в работах [1, 3, 19].

Известно, что класс $C_0^\infty(\Omega)$ плотен в пространствах Лебега $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$. В статье доказано, что в гранд-пространствах Лебега $L^{p)}_a(\Omega)$ множество «хороших» функций не является плотным, но оно плотно в некотором подмножестве пространства $L^{p)}_a(\Omega)$ (лемма 2.6).

При изучении операторов типа потенциала оказались полезными основные пространства Φ — пространства Лизоркина. В книгах [4, 16] доказана плотность класса Φ в $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Теорема 3.1 распространяет это утверждение на некоторое подпространство гранд-пространства Лебега $L^{p)}_a(\Omega)$.

2.1. Гранд-пространства Лебега $L_a^{p)}(\Omega)$ и $\mathring{L}_a^{p)}(\Omega)$

2.1. Основные определения и некоторые свойства. Пусть Ω — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ и w — вес на Ω, т. е. неотрицательная локально интегрируемая функция, определенная и неравная нулю почти всюду на Ω. Весовые пространства Лебега $L^p(\Omega, w)$ определяются нормой

$$\|f\|_{L^p(\Omega,w)} = \left\{ \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p w(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

При $w \equiv 1$ мы пишем $L^p(\Omega)$.

Гранд-пространства Лебега $L^{p)}(\Omega)$ по ограниченному множеству Ω определяются нормой

$$\|f\|_{L^{p)}(\Omega)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)}.$$

Пространства $L^{p)}(\Omega)$ были введены и изучены в вышеуказанных работах для функций, определенных на ограниченных множествах $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. В статьях [2, 17, 18, 20] был предложен подход, позволяющий ввести гранд-пространства Лебега на множествах произвольной (неограниченной) меры посредством некоторой неотрицательной функции a:

$$\begin{gathered} L_a^{p)}(\Omega) := \left\{ f : \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon \int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} a(x)^{\varepsilon}\, dx < \infty \right\}, \\ \|f\|_{L_a^{p)}(\Omega)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega, a^{\varepsilon})}. \end{gathered} \tag{1}$$

Обозначим через $\mathring{L}_a^{p)}(\Omega)$ ($L_0^{p)}(\Omega)$ при $a \equiv 1$) подпространство пространства $L_a^{p)}(\Omega)$, состоящее из функций $f \in L_a^{p)}(\Omega)$, для которых

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} [a(x)]^{\varepsilon}\, dx = 0.$$

При $a \in L^p(\Omega)$ имеет место цепочка вложений

$$L^p(\Omega) \subset \mathring{L}_a^{p)}(\Omega) \subset L_a^{p)}(\Omega) \subset L^{p-\varepsilon_1}(\Omega, a^{\varepsilon_1}) \subset L^{p-\varepsilon_2}(\Omega, a^{\varepsilon_2}), \quad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < p-1. \tag{2}$$

Приведем примеры функций, подтверждающих строгость первых двух вложений в (2).

Пример 2.1. $f_0(x) = x^{-\frac{1}{p}} \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-\frac{\lambda}{p}}$, $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$.

$$\begin{aligned} f_0 \in & L^p(0, 1/e), && \lambda > 1; \\ f_0 \in & L_0^{p)}(0,\, 1/e), && \lambda > 0; \\ f_0 \in & L^{p)}(0,\, 1/e), && \lambda \geqslant 0. \end{aligned}$$

Действительно, для $\lambda > 1$ имеем $\|f_0\|_{L^p(0,1/e)} = \left\{\int_1^{\infty} t^{-\lambda}\, dt\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$.

При $\lambda = 0$ получим

$$\|f_0\|_{L^{p)}(0,1/e)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left\{ \varepsilon \int\limits_0^{1/e} x^{-1+\frac{\varepsilon}{p}}\,dx \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(p\,e^{-\frac{\varepsilon}{p}} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty.$$

Пусть $0 < \lambda \leqslant 1$. Тогда

$$\varepsilon \int\limits_0^{1/e} |f_0(x)|^{p-\varepsilon}\,dx = \varepsilon^{\frac{\lambda}{p}(p-\varepsilon)} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} e^{-y} y^{-\frac{\lambda}{p}(p-\varepsilon)}\,dy \sim \begin{cases} \varepsilon^{\frac{\lambda}{p}(p-\varepsilon)}, & \lambda < 1 \\ 1 - \varepsilon^{\frac{\varepsilon}{p}}, & \lambda = 1 \end{cases} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Благодаря следующей лемме в дальнейшем некоторые выкладки будут существенно упрощены.

Лемма 2.2. *Пусть* $a \in L^p(\Omega)$. *Нормы* $\|f\|_{L_a^{p)}(\Omega)}$ *и* $\|f\|_{L_{ca}^{p)}(\Omega)}$, *где* c *— положительная константа, эквивалентны.*

В дальнейшем, основываясь на лемме 2.2, в качестве параметра a в определении гранд-пространства $L_a^{p)}(\Omega)$ будем рассматривать неотрицательные и неравные нулю почти всюду на Ω функции из класса $L^p(\Omega)$ такие, что

$$\|a\|_{L^p(\Omega)} = 1.$$

Пусть $\delta \in (0, p-1)$. В гранд-пространстве Лебега $L_a^{p)}(\Omega)$ кроме нормы (1) рассмотрим еще норму

$$\|f\|_{L_a^{p)}(\Omega;\delta)} = \sup_{0<\varepsilon\leqslant\delta} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega,a^{\varepsilon})}.$$

Лемма 2.3. *Пусть* a *— вес из* $L^p(\Omega)$. *Тогда нормы* $\|f\|_{L_a^{p)}(\Omega)}$ *и* $\|f\|_{L_a^{p)}(\Omega;\delta)}$ *эквивалентны.*

$\lhd$ Неравенство $\|f\|_{L_a^{p)}(\Omega;\delta)} \leqslant \|f\|_{L_a^{p)}(\Omega)}$ очевидно. Пусть $\delta \in (0, p-1)$, покажем, что существует число $C_\delta > 0$ такое, что

$$\|f\|_{L_a^{p)}(\Omega)} \leqslant C_\delta \|f\|_{L_a^{p)}(\Omega;\delta)}. \tag{3}$$

Имеем

$$\|f\|_{L_a^{p)}(\Omega)} = \max\left\{ \|f\|_{L_a^{p)}(\Omega;\delta)}, B_\delta \right\},$$

где

$$B_\delta = \sup_{\delta<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega,a^{\varepsilon})}.$$

Применив неравенство Гёльдера с показателями $r = \frac{p-\delta}{p-\varepsilon} > 1$, $r' = \frac{p-\delta}{\varepsilon-\delta}$, получим

$$\|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega,a^{\varepsilon})} = \left(\int\limits_{\Omega} |f|^{p-\varepsilon} a^{\varepsilon}\,dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \left(\int\limits_{\Omega} |f|^{p-\varepsilon} a^{\frac{\delta}{r}} a^{\varepsilon-\frac{\delta}{r}}\,dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leqslant \|f\|_{L^{p-\delta}(\Omega,a^{\delta})} \left(\int\limits_{\Omega} a^p\,dx \right)^{\frac{\varepsilon-\delta}{(p-\varepsilon)(p-\delta)}} = \|f\|_{L^{p-\delta}(\Omega,a^{\delta})}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} B_\delta &\leqslant \sup_{\delta<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\delta}(\Omega,a^\delta)} \\ &= \sup_{\delta<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \delta^{-\frac{1}{p-\delta}} \delta^{\frac{1}{p-\delta}} \|f\|_{L^{p-\delta}(\Omega,a^\delta)} \leqslant (p-1)\delta^{-\frac{1}{p-\delta}} \|f\|_{L_a^{p)}(\Omega;\delta)}. \end{aligned}$$

Это дает оценку (3) с константой

$$C_\delta = \max\left\{1, (p-1)\delta^{-\frac{1}{p-\delta}}\right\}. \rhd$$

Лемма 2.4. *Множество* $L_a^{p)}(\Omega)$ *есть банахово пространство относительно нормы* (1).

Доказательство леммы проводится стандартными рассуждениями. Для полноты изложения мы приводим его в приложении.

Лемма 2.5. *Пространство* $\mathring{L}_a^{p)}(\Omega)$ *замкнуто относительно нормы* (1) *и, следовательно, есть подпространство пространства* $L_a^{p)}(\Omega)$: $\mathring{L}_a^{p)}(\Omega) \subsetneq L_a^{p)}(\Omega)$.

$\lhd$ Тот факт, что $\mathring{L}_a^{p)}(\Omega) \subsetneq L_a^{p)}(\Omega)$ видно из примера 2.1. Чтобы доказать, что множество $\mathring{L}_a^{p)}(\Omega)$ замкнуто по норме (1), рассмотрим последовательность $\{f_k\}$ элементов из $\mathring{L}_a^{p)}(\Omega)$, сходящуюся к некоторой функции f. В силу вложения $\mathring{L}_a^{p)}(\Omega) \subset L_a^{p)}(\Omega)$ и полноты пространства $L_a^{p)}(\Omega)$ функция f принадлежит $L_a^{p)}(\Omega)$. Осталось показать, что $f \in \mathring{L}_a^{p)}(\Omega)$, т. е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int\limits_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon}[a(x)]^\varepsilon\, dx = 0.$$

Имеем

$$\left\{\varepsilon \int\limits_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon}[a(x)]^\varepsilon\, dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \leqslant \|f-f_k\|_{L_a^{p)}(\Omega)} + \left\{\varepsilon \int\limits_\Omega |f_k(x)|^{p-\varepsilon}[a(x)]^\varepsilon\, dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.$$

Первое слагаемое можно сделать сколь угодно малым для достаточно больших k в силу полноты пространства $L_a^{p)}(\Omega)$, а второе — для достаточно малых ε в силу того, что $f_k \in \mathring{L}_a^{p)}(\Omega)$. $\rhd$

2.2. Плотность множества гладких функций

Теорема 2.6. *Пусть* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, a — *вес из* $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. *Тогда множество* $C_0^\infty(\Omega)$ *плотно в* $\mathring{L}_a^{p)}(\Omega)$.

$\lhd$ Докажем сначала, что множество ограниченных функций плотно в $\mathring{L}_a^{p)}(\Omega)$. Потом докажем, что любую ограниченную функцию можно приблизить по норме пространства $L_a^{p)}(\Omega)$ бесконечно дифференцируемыми финитными функциями.

1. Пусть $f \in \mathring{L}_a^{p)}(\Omega)$. Нужно доказать, что существует последовательность ограниченных функций f_N такая, что

$$(\forall\,\delta > 0)\ (\exists\, N_0) \quad \|f - f_N\|_{L_a^{p)}(\Omega)} < \frac{\delta}{2} \quad (\forall\, N \geqslant N_0). \tag{4}$$

Построим такую последовательность с помощью «срезок» f_N данной функции f:

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leqslant N; \\ 0, & |f(x)| > N. \end{cases}$$

По определению класса $\overset{\circ}{L}{}^{p)}_{a}(\Omega)$ имеем $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_{\Omega}|f(x)|^{p-\varepsilon}[a(x)]^{\varepsilon}\,dx=0$. Следовательно,

$$(\exists\,\varepsilon_0>0)\quad \left\{\varepsilon\int\limits_{\Omega}|f(x)|^{p-\varepsilon}[a(x)]^{\varepsilon}\,dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}<\frac{\delta}{2}\quad(\forall\,\varepsilon\leqslant\varepsilon_0),\tag{5}$$

где δ из (4).

Тогда

$$\|f-f_N\|_{L^{p)}(\Omega)}=\sup_{0<\varepsilon<p-1}\left\{\varepsilon\int\limits_{E_N}|f(x)|^{p-\varepsilon}[a(x)]^{\varepsilon}\,dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}=\max\left\{\delta_1,\delta_2\right\},$$

где $E_N=\{x\in\Omega:\ |f(x)|>N\}$ и

$$\delta_1(N)=\sup_{0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}\left\{\varepsilon\int\limits_{E_N}|f(x)|^{p-\varepsilon}[a(x)]^{\varepsilon}\,dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}},$$

$$\delta_2(N)=\sup_{\varepsilon_0<\varepsilon<p-1}\left\{\varepsilon\int\limits_{E_N}|f(x)|^{p-\varepsilon}[a(x)]^{\varepsilon}\,dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

с ε_0 из (5).

Для $\delta_1(N)$ в силу (5) и вложения $E_N\subset\Omega$ получим

$$\delta_1(N)\leqslant\sup_{0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}\left\{\varepsilon\int\limits_{\Omega}|f(x)|^{p-\varepsilon}[a(x)]^{\varepsilon}\,dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\leqslant\frac{\delta}{2}.$$

Для оценки величины $\delta_2(N)$ воспользуемся неравенством Гёльдера с показателем $r=\frac{p-\varepsilon_0}{p-\varepsilon}>1$:

$$\delta_2(N)\leqslant\sup_{\varepsilon_0<\varepsilon<p-1}\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left\{\int\limits_{E_N}|f(x)|^{p-\varepsilon_0}[a(x)]^{\varepsilon_0}\,dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}}\left\{\int\limits_{E_N}[a(x)]^{p}\,dx\right\}^{\frac{p(\varepsilon-\varepsilon_0)}{(p-\varepsilon_0)(p-\varepsilon)}}$$

$$\leqslant\sup_{\varepsilon_0<\varepsilon<p-1}\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left\{\int\limits_{E_N}|f(x)|^{p-\varepsilon_0}[a(x)]^{\varepsilon_0}\,dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}}\leqslant(p-1)\left\{\int\limits_{E_N}|f(x)|^{p-\varepsilon_0}[a(x)]^{\varepsilon_0}\,dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}}.$$

Следовательно, существует натуральное число N_0 такое, что

$$\delta_2(N)\leqslant\frac{\delta}{2}\quad(\forall\,N>N_0).$$

Таким образом,

$$\|f-f_N\|_{L^{p)}(\Omega)}<\frac{\delta}{2}\quad(\forall\,N\geqslant N_0),$$

что и требовалось доказать.

2. Пусть теперь f — ограниченная на Ω функция из $\overset{\circ}{L}{}^{p)}_{a}(\Omega)$. Следовательно, $f\in L^{p-\varepsilon}(\Omega,a^{\varepsilon})$ для любого $\varepsilon\in(0,p-1)$. В силу плотности множества $C_0^{\infty}(\Omega)$ в $L^{q}(\Omega)$,

$q \geqslant 1$, можно выбрать функцию $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ такой, что $\|f-\varphi\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega,a^\varepsilon)} < \frac{\delta}{2(p-1)}$. Тогда получим

$$\|f-\varphi\|_{L_a^{p)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f-\varphi\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega,a^\varepsilon)} < \frac{\delta}{2}.$$

И, наконец,

$$\|f-\varphi\|_{L_a^{p)}(\Omega)} \leqslant \|f-f_{N_0}\|_{L_a^{p)}(\Omega)} + \|f_{N_0}-\varphi\|_{L_a^{p)}(\Omega)} < \delta,$$

что и требовалось доказать. $\rhd$

3. Пространство Φ

Выделим в пространстве Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ подпространство

$$\Psi = \big\{\psi : \psi \in S,\ (D^j\psi)(0) = 0,\ |j| = 0, 1, 2\dots\big\}$$

функций, исчезающих в начале координат вместе со всеми своими производными.

Рассмотрим теперь класс Φ, двойственный к Ψ, состоящий из преобразований Фурье функций из Ψ:

$$\Phi = \big\{\varphi : \varphi = \widehat{\psi},\ \psi \in \Psi\big\}.$$

Известно (см., например, [4, 16]), что класс Φ состоит из тех и только тех шварцевских функций, которые ортогональны многочленам:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x^j \varphi(x)\,dx = 0, \quad |j| = 0, 1, 2, \dots$$

В монографиях [4, 16] приведено доказательство плотности класса Φ в пространствах Лебега $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. В следующей теореме мы распространяем это утверждение на $\mathring{L}_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 3.1. *Класс Φ плотен в подпространстве $\mathring{L}_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$ пространства $L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$.*

$\lhd$ Пусть $f \in \mathring{L}_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$ и $\delta > 0$. Нужно показать, что существует последовательность функций $\varphi_N \in \Phi$ такая, что для всякого $\delta > 0$ неравенство $\|f-\varphi_N\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)} < \delta$ выполняется при всех N, больших некоторого N_0.

Так как по лемме 2.6 множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $\mathring{L}_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$, то существует функция $f_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\|f-f_0\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)} < \frac{\delta}{2}.$$

Теперь осталось приблизить f_0 функциями из Φ. Для этого мы построим подходящую последовательность, рассуждая аналогично приведенным в [4, с. 22, 23] и [16, с. 42] рассуждениям. Для $f_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_N(x) = f_0(x) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(t) f_0(x - Nt)\,dt,$$

где $k(t)$ — прообраз Фурье функции $1 - \mu(N|x|) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mu(r) \equiv 1$ при $r \geqslant 2$, $\mu(r) \equiv 0$ при $0 \leqslant r \leqslant 1$ и $0 \leqslant \mu(r) \leqslant 1$. Функции φ_N принадлежат классу Φ, и последовательность

$\{\varphi_N\}$ сходится по норме пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, к функции f_0. Следовательно, существует номер N_0, такой что

$$\|f_0 - \varphi_N\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \frac{\delta}{2(p-1)} \quad (\forall\, N > N_0).$$

Переходя к норме в пространстве $L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$ и применив неравенство Гёльдера, получим

$$\|f_0 - \varphi_N\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left\{ \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_0(x) - \varphi_N(x)|^{p-\varepsilon} [a(x)]^{\varepsilon}\, dx \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$
$$\leqslant \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f_0 - \varphi_N\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \frac{\delta}{2},$$

что завершает доказательство. $\rhd$

4. Приложение

Доказательство леммы 2.4. Воспользуемся схемой доказательства из [12]. Пусть $\{f_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — последовательность Коши из $L_a^{p)}(\Omega)$, т. е. для любого $\delta > 0$ существует натуральное число N такое, что для всех $k, m \geqslant N$ выполняется неравенство

$$\|f_k - f_m\|_{L_a^{p)}(\Omega)} < \frac{\delta}{3}.$$

Имеем

$$\|f_k - f_m\|_{L_a^{p)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f_k - f_m\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega, a^{\varepsilon})} < \frac{\delta}{3}.$$

Следовательно, $\{f_k\}$ — последовательность Коши в пространстве $L^{p-\varepsilon}(\Omega, a^{\varepsilon})$ для любого $\varepsilon \in (0, p-1)$ и пусть f есть его предел в $L^{p-\varepsilon}(\Omega, a^{\varepsilon})$.

Пусть $k > N$. По определению супремума существует число ε_0, зависящее от k, $0 < \varepsilon_0(n) < p - 1$, такое, что

$$\|f - f_k\|_{L_a^{p)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f - f_k\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega, a^{\varepsilon})} \leqslant \varepsilon_0^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}} \|f - f_k\|_{L^{p-\varepsilon_0}(\Omega, a^{\varepsilon_0})} + \frac{\delta}{3}.$$

Более того, существует натуральное число N_1 такое, что для $m > N_1$

$$\varepsilon_0^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}} \|f - f_m\|_{L^{p-\varepsilon_0}(\Omega, a^{\varepsilon_0})} + \frac{\delta}{3}.$$

Поэтому

$$\|f - f_k\|_{L_a^{p)}(\Omega)} \leqslant \varepsilon_0^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}} \|f_m - f_k\|_{L^{p-\varepsilon_0}(\Omega, a^{\varepsilon_0})}$$
$$+\varepsilon_0^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}} \|f_m - f\|_{L^{p-\varepsilon_0}(\Omega, a^{\varepsilon_0})} + \frac{\delta}{3} \leqslant \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta.$$

Таким образом,

$$\|f - f_k\|_{L_a^{p)}(\Omega)} < \delta$$

для любого $k > N$.

Автор выражает благодарность профессору С. Г. Самко за полезное обсуждение результатов работы и рецензенту за замечания к первоначальному тексту статьи.

Литература

1. *Умархаджиев С. М.* Ограниченность линейных операторов в весовых обобщенных гранд-пространствах Лебега // Вестн. АН Чеченской республики.—2013.—Т. 2, № 19.—С. 5–9.
2. *Умархаджиев С. М.* Обобщение понятия гранд-пространства Лебега // Изв. вузов. Математика.—2014.—Т. 4.—С. 42–51.
3. *Умархаджиев С. М.* Ограниченность потенциала Рисса в весовых обобщенных гранд-пространствах Лебега // Владикавк. мат. журн.—2014.—Т. 16, № 2.—С. 62–68.
4. *Самко С. Г.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения.—Ростов-н/Д.: Изд-во РГУ, 1984.—208 с.
5. *Di Fratta G., Fiorenza A.* A direct approach to the duality of grand and small Lebesgue spaces // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications.—2009.—Vol. 70, № 7.—P. 2582–2592.
6. *Fiorenza A.* Duality and reflexivity in grand Lebesgue spaces // Collect. Math.—2000.—Vol. 51, № 2.—P. 131–148.
7. *Fiorenza A., Gupta B., and Jain P.* The maximal theorem in weighted grand Lebesgue spaces // Stud. Math.—2008.—Vol. 188, № 2.—P. 123–133.
8. *Fiorenza A. and Karadzhov G. E.* Grand and small Lebesgue spaces and their analogs // J. Anal. and its Appl.—2004.—Vol. 23, № 4.—P. 657–681.
9. *Fiorenza A. and Rakotoson J. M.* Petits espaces de Lebesgue et leurs applications // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I.—2001.—Vol. 333.—P. 1–4.
10. *Greco L., Iwaniec T., and Sbordone C.* Inverting the p-harmonic operator // Manuscripta Math.—1997.—Vol. 92.—P. 249–258.
11. *Iwaniec T. and Sbordone C.* On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses // Arch. Rational Mech. Anal.—1992.—Vol. 119.—P. 129–143.
12. *Kokilashvili V.* Weighted problems for operators of harmonic analysis in some Banach function spaces. Lecture course of Summer School and Workshop «Harmonic Analysis and Related Topics» (HART2010): Lisbon; [cited 2010 June 21–25].—URL: http://www.math.ist. utl.pt/$\tilde{\ }$hart2010/kokilashvili.pdf.
13. *Kokilashvili V.* Boundedness criterion for the Cauchy singular integraloperator in weighted grand Lebesgue spaces and application to the Riemannproblem // Proc. A. Razmadze Math. Inst.—2009.—Vol. 151.—P. 129–133.
14. *Kokilashvili V.* The Riemann boundary value problem for analytic functions in the frame ofgrand $L^{p)}$ spaces // Bull. Georgian Nat. Acad. Sci.—2010.—Vol. 4, № 1.—P. 5–7.
15. *Kokilashvili V. and Meskhi A.* A note on the boundedness of the Hilberttransform in weighted grand Lebesgue spaces // Georgian Math. J.—2009.—Vol. 16, № 3.—P. 547–551.
16. *Samko S. G.* Hypersingular Integrals and their Applications.—London–N. Y.: Taylor & Francis, 2002.—xvii+358 p.—(Ser. Analytical Methods and Special Functions; Vol. 5).
17. *Samko S. G. and Umarkhadzhiev S. M.* On Iwaniec–Sbordone spaces on sets which may have infinite measure // Azerb. J. Math.—2011.—Vol. 1, № 1.—P. 67–84.
18. *Samko S. G. and Umarkhadzhiev S. M.* On Iwaniec–Sbordone spaces on sets which may have infinite measure: addendum // Azerb. J. Math.—2011.—Vol. 1, № 2.—P. 143–144.
19. *Umarkhadzhiev S. M.* The boundedness of the Riesz potential operator from generalized grand Lebesgue spaces to generalized grand Morrey spaces // Operator Theory: Advances and Applications.—Birkhäuser: Basel, 2014.—Vol. 242.—P. 363–373.
20. *Umarkhadzhiev S. M.* A generalization concept of grand Lebesgue space // Russian Math. (Iz. VUZ).—2014.—Vol. 58, № 4.—P. 35–43.

Статья поступила 14 декабря 2014 г.

Умархаджиев Салаудин Мусаевич
Академия наук Чеченской республики,
заведующий отделом прикладной семиотики
РОССИЯ, 364024, Грозный, пр. М. Эсамбаева, 13;

Чеченский государственный университет,
НИИ Математической физики и сейсмодинамики,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 364037, Грозный, ул. А. Шерипова, 32
E-mail: `umsalaudin@gmail.com`

DENSENESS OF THE LIZORKIN SPACE IN GRAND LEBESGUE SPACES

Umarkhadzhiev S. M.

Denseness of the Lizorkin space in some subspace of a grand Lebesgue space on an open set $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ is proved.

Key words: Grand Lebesgue space, Lizorkin space, denseness of infinitely differentiable functions.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 3, С. 84–92

УДК **517.984.64**

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ОПЕРАТОРА РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТИ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННОМУ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ФУРЬЕ

С. А. Унучек

В работе рассматривается задача восстановления k-й разделенной разности последовательности при условии, что приближенно известно преобразование Фурье этой последовательности на интервале. Построен оптимальный метод восстановления.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, экстремальная задача, разделенная разность, преобразование Фурье.

1. Введение

Задача оптимального восстановления линейного функционала по значениям других линейных функционалов впервые была поставлена С. А. Смоляком [1] в 1965 г. В основе этой работы лежали идеи А. Н. Колмогорова о наилучшем приближении на классе функций, изложенные в работах [2] и [3]. Задача об оптимальном восстановлении по неточно заданной информации была поставлена в работе [4]. В данной работе изучается задача восстановления самой последовательности или ее k-й разделенной разности $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ в среднеквадратичной норме по неточно заданному на интервале преобразованию Фурье данной последовательности в равномерной норме на классе последовательностей с ограниченной n-й разделенной разностью. Задача одновременного восстановления нескольких разделенных разностей различного порядка по неточно заданной последовательности с ограниченной n-й разделенной разностью в среднеквадратичной норме рассматривалась в работе [5]. Задача восстановления функции и ее k-й производной по неточно заданному преобразованию Фурье этой функции рассматривалась в работе [6]. Результат, полученный в данной работе, в предельном случае переходит в результат, полученный в работе [6].

2. Основные понятия

Рассмотрим пространство $l_{2,h}(\mathbb{Z})$, $h > 0$, всех последовательностей $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ таких, что

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2 < \infty, \quad \|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \left(h \sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Напомним определение оператора разделенных разностей:

$$\Delta_h^1 x = \Delta_h x = \left\{ \frac{x_{j+1} - x_j}{h} \right\}_{j\in\mathbb{Z}}, \quad \Delta_h^k x = \Delta_h\bigl(\Delta_h^{k-1} x\bigr).$$

Обозначим

$$\mathscr{L}^n_{2,h}(\mathbb{Z}) = \bigl\{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) : \|\Delta^n_h x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leqslant 1\bigr\},$$

$$\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}) = \bigl\{x \in \mathscr{L}^n_{2,h}(\mathbb{Z}) : (Fx)(\cdot) \in L_\infty([-\pi/h, \pi/h])\bigr\},$$

где образом Фурье последовательности $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ является функция

$$(Fx)(\omega) = h\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j e^{-ijh\omega} \in L_2([-\pi/h, \pi/h]).$$

Образами Фурье для операторов разделенных разностей являются функции

$$\begin{aligned}(F\Delta_h x)(\omega) &= h\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{x_{j+1}-x_j}{h}\, e^{-ijh\omega}\\ &= \frac{1}{h}\left(h\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_{j+1}e^{-i(j+1)h\omega}e^{ih\omega} - h\sum_{j\in Z} x_j e^{-ijh\omega}\right)\\ &= \frac{e^{ih\omega}}{h}\cdot h\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_{j+1}e^{-i(j+1)h\omega} - \frac{1}{h}\cdot h\sum_{j\in Z} x_j e^{-ijh\omega} = \frac{e^{ih\omega}-1}{h}\,(Fx)(w).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\bigl(F\Delta^k_h x\bigr)(\omega) = \frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}\,(Fx)(\omega).$$

Пусть для каждой последовательности $x \in \mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$ также приближенно известно ее преобразование Фурье на множестве $(-\sigma;\sigma)$, $\sigma \leqslant \pi/h$, в метрике $L_\infty(-\sigma;\sigma)$, т. е. известна некоторая функция $y \in L_\infty(-\sigma;\sigma)$ такая, что

$$\bigl\|(Fx)(\cdot) - y(\cdot)\bigr\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \leqslant \delta.$$

Задача состоит в оптимальном восстановлении либо самой последовательности, либо оператора разделенной разности k-го порядка последовательности $x \in \mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$.

В качестве метода восстановления рассмотрим всевозможные отображения

$$m(y) : L_\infty(-\sigma;\sigma) \to l_{2,h}(\mathbb{Z}).$$

Погрешностью метода m будем называть величину

$$e\bigl(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta, m\bigr) = \sup_{\substack{x\in\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),\\ y\in L_\infty(-\sigma;\sigma),\\ \|(Fx)(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)}\leqslant\delta}} \bigl\|(\Delta^k_h x) - m(y(\cdot))\bigr\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E\bigl(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta\bigr) = \inf_{m\colon L_\infty(-\sigma;\sigma)\to l_{2,h}(\mathbb{Z})} e\bigl(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta, m\bigr).$$

Метод m, на котором достигается нижняя грань, будем называть *оптимальным методом.*

3. Основной результат

Положим
$$g(\omega)=\frac{|e^{ih\omega}-1|^2}{h^2}=\left(\frac{2\sin\frac{h\omega}{2}}{h}\right)^2,$$
$\widehat{\sigma}$ — решение уравнения $\int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} g^n(\omega)d\omega=\frac{2\pi}{\delta^2}$, $\sigma_0=\min(\sigma,\widehat{\sigma})$.

Теорема 1. *Погрешность оптимального восстановления равна*
$$E\bigl(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),k,\delta\bigr)=\begin{cases}\sqrt{\Omega}, & \sigma_0<\pi/h,\\ \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^k(\omega)\,d\omega}, & \sigma_0=\pi/h,\end{cases}\tag{1}$$
где
$$\Omega=\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0} g^k(\omega)\,d\omega+g^{k-n}(\sigma_0)\left(1-\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0} g^n(\omega)\,d\omega\right).$$

При $\sigma_0<\pi/h$ метод $\widehat{m}(y)$ такой, что
$$F\widehat{m}(y)=\begin{cases}\alpha(\omega)y(\omega), & |\omega|\leqslant\sigma_0,\\ 0, & |\omega|>\sigma_0,\end{cases}$$
где
$$\alpha(\omega)=\left(1-\left(\frac{g(\omega)}{g(\sigma_0)}\right)^{n-k}\right)\cdot\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k},$$
является оптимальным. При $\sigma_0=\pi/h$ метод $\widehat{m}(y)$ такой, что
$$F\widehat{m}(y)=\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}\,y(\omega),$$
является оптимальным.

4. Доказательство

Лемма 1. *Имеет место неравенство*
$$E\bigl(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),k,\delta\bigr)\geqslant\sup_{\substack{x\in\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),\\ \|(Fx)(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)}\leqslant\delta}}\bigl\|\Delta_h^k x\bigr\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}.\tag{2}$$

◁ Для любой последовательности $x\in\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$ такой, что выполнено неравенство $\|(Fx)(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)}\leqslant\delta$, и для любого метода m имеем
$$\begin{gathered}2\bigl\|\Delta_h^k x\bigr\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}=\bigl\|\Delta_h^k(x)-\Delta^k(-x)+m(0)-m(0)\bigr\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\\ \leqslant\bigl\|\Delta_h^k(x)-m(0)\bigr\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}+\bigl\|\Delta_h^k(-x)-m(0)\bigr\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\leqslant 2e\bigl(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),k,\delta,m\bigr),\end{gathered}$$
т. е. для любого метода m
$$e\bigl(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),k,\delta,m\bigr)\geqslant\sup_{\substack{x\in\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),\\ \|(Fx)(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)}\leqslant\delta}}\bigl\|\Delta_h^k x\bigr\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}.$$
Отсюда следует неравенство (2). ▷

Доказательство теоремы 1. Из леммы 1 следует, что погрешность оптимального восстановления не меньше значения экстремальной задачи

$$\begin{gathered}\left\|\Delta_h^k x\right\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \to \max,\\ \left\|\Delta_h^n x\right\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leqslant 1, \quad \left\|(Fx)(\omega)\right\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \leqslant \delta.\end{gathered} \tag{3}$$

Перейдем к квадрату задачи (3) и запишем ее в образах Фурье. По теореме Планшереля имеем

$$\left\|\Delta_h^m x\right\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \frac{1}{2\pi}\left\|F(\Delta_h^m x)(\omega)\right\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])},$$

$$\left\|\Delta_h^m x\right\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} \frac{|e^{ih\omega}-1|^{2m}}{h^{2m}}\,|Fx(\omega)|^2\,d\omega.$$

Тем самым, приходим к следующей задаче:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} \frac{|e^{ih\omega}-1|^{2k}}{h^{2k}}\,|(Fx)(\omega)|^2\,d\omega \to \max;\\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} \frac{|e^{ih\omega}-1|^{2n}}{h^{2n}}\,|(Fx)(\omega)|^2\,d\omega \leqslant 1, \quad |(Fx)(\omega)|^2 \leqslant \delta^2\end{gathered} \tag{4}$$

для почти всех $\omega \in (-\sigma;\sigma)$, $x \in \mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$.

Пусть $\sigma \geqslant \widehat{\sigma}$. Покажем, что значение задачи (4) не меньше, чем

$$\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} g^k(\omega)\,d\omega.$$

Введем функцию $p(\omega) = \frac{1}{2\pi}|(Fx)(\omega)|^2 d\omega \geqslant 0$. Тогда задача (4) принимает вид

$$\begin{gathered}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^k(\omega)p(\omega)\,d\omega \to \max;\\ \int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^n(\omega)p(\omega)\,d\omega \leqslant 1, \quad p(\omega) \leqslant \frac{\delta^2}{2\pi}.\end{gathered} \tag{5}$$

Положим $\widehat{p}(\omega) = \begin{cases}\frac{\delta^2}{2\pi}, & \omega \in (-\widehat{\sigma};\widehat{\sigma}),\\ 0, & \omega \notin (-\widehat{\sigma};\widehat{\sigma}).\end{cases}$

Так как

$$\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^n(\omega)\,\widehat{p}(\omega)\,d\omega = \frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} g^n(\omega)\,d\omega = 1,$$

то функция $\widehat{p}(\omega)$ допустима в задаче (5), т. е. значение этой задачи не меньше, чем

$$\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^k(\omega)\,\widehat{p}(\omega)\,d\omega = \frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} g^k(\omega)\,d\omega.$$

При $\sigma \geqslant \widehat{\sigma}$ имеем, что

$$E^2\big(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta\big) \geqslant \frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} g^k(\omega)\, d\omega,$$

т. е. получена оценка снизу при $\sigma_0 = \widehat{\sigma}$.

Рассмотрим случай $\sigma < \widehat{\sigma}$, $\sigma < \pi/h$. Положим

$$S(m) = \sqrt{\frac{\pi m}{g^n\left(\frac{\sigma+\frac{1}{m}}{2}\right)} \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{|\omega|\leqslant\sigma} g^n(\omega)\, d\omega\right)}.$$

Пусть m достаточно большое натуральное число такое, что выполняется неравенство $\sigma + \frac{1}{m} < \frac{\pi}{h}$. Рассмотрим последовательность функций x_m, для которой

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} \delta, & \omega \in (-\sigma; \sigma), \\ S(m), & \sigma < |\omega| < \sigma + \frac{1}{m}, \\ 0, & |\omega| \geqslant \sigma + \frac{1}{m}. \end{cases}$$

Неравенство $\frac{1}{2\pi}|(Fx_m)(\omega)|^2 \leqslant \frac{\delta^2}{2\pi}$ выполнено для всех $|\omega| < \sigma$. Далее, имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^n(\omega)|(Fx_m)(\omega)|^2\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\left(2\delta^2 \int\limits_0^\sigma g^n(\omega)\, d\omega + 2S^2(m) \int\limits_\sigma^{\sigma+\frac{1}{m}} g^n(\omega)\, d\omega\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\left(\delta^2 \int\limits_0^\sigma g^n(\omega)\, d\omega + \frac{\pi m}{g^n\big(\sigma + \frac{1}{m}\big)} \cdot \left(1 - \frac{\delta^2}{\pi} \int\limits_0^\sigma g^n(\omega)\, d\omega\right) \cdot \frac{1}{m} g^n\left(\sigma + \frac{1}{m}\right)\right) = 1,$$

т. е. последовательность функций x_m допустима в задаче (4). Значение этой задачи не менее величины

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^k(\omega)|(Fx_m)(\omega)|^2\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\left(2\delta^2 \int\limits_0^\sigma g^k(\omega)\, d\omega + 2S^2(m) \int\limits_\sigma^{\sigma+\frac{1}{m}} g^k(\omega)\, d\omega\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi}\left(\delta^2 \int\limits_0^\sigma g^k(\omega)\, d\omega + \frac{\pi m}{g^n\left(\sigma + \frac{1}{m}\right)} \cdot \left(1 - \frac{\delta^2}{\pi} \int\limits_0^\sigma g^n(\omega)\, d\omega\right) \cdot \frac{1}{m} g^k(\sigma)\right).$$

При $m \to \infty$ величина, стоящая в правой части, стремится к

$$\Omega = \left(\frac{\delta^2}{\pi} \int\limits_0^\sigma g^k(\omega)\, d\omega + g^{k-n}(\sigma) \cdot \left(1 - \frac{\delta^2}{\pi} \int\limits_0^\sigma g^n(\omega)\, d\omega\right)\right).$$

Тем самым, мы показали, что при $\sigma < \widehat{\sigma}$, $\sigma < \pi/h$ справедливо неравенство $E^2(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta) \geqslant \Omega$.

В случае $\sigma = \frac{\pi}{h} < \widehat{\sigma}$ положим $(Fx)(\omega) = \delta$, $|\omega| < \frac{\pi}{h}$. Тогда, поскольку выполнено равенство $\frac{\delta^2}{2\pi}\int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} g^n(\omega)\, d\omega = 1$, $\widehat{\sigma} > \frac{\pi}{h}$, функция $g^n(\omega)$ неотрицательная, то выполнено неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^n(\omega)|(Fx_m)(\omega)|^2\, d\omega = \frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^n(\omega)\, d\omega < 1.$$

Это означает, что функция $x(\cdot)$ допустима в задаче (4) и значение задачи не менее величины

$$\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^k(\omega)\,d\omega.$$

Тем самым мы показали, что

$$E\big(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),k,\delta\big)\geqslant\begin{cases}\sqrt{\Omega}, & \sigma_0<\pi/h,\\ \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^k(\omega)\,d\omega}, & \sigma_0=\pi/h.\end{cases}$$

Пусть $\sigma_0=\min(\sigma,\widehat{\sigma})$, $\sigma_0<\pi/h$. Покажем, что метод $\widehat{m}:L_\infty(-\sigma;\sigma)\to l_{2,h}(\mathbb{Z})$ такой, что

$$F\widehat{m}(y)=\begin{cases}\alpha(\omega)y(\omega), & |\omega|<\sigma_0,\\ 0, & |\omega|\geqslant\sigma_0,\end{cases}$$

является оптимальным.

Для оценки оптимальной погрешности восстановления разделенных разностей рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered}\big\|\Delta^k_h x-\widehat{m}_k(y)\big\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\to\max,\quad \big\|(Fx)(\cdot)-y(\cdot)\big\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)}\leqslant\delta,\\ x\in\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),\quad y\in L_\infty(-\sigma;\sigma).\end{gathered}\tag{6}$$

В образах Фурье квадрат задачи принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\Bigg(\int\limits_{|\omega|<\sigma_0}\left|\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}\,Fx(\omega)-\alpha(\omega)y(\omega)\right|^2d\omega\\ +\int\limits_{\sigma_0\leqslant|\omega|\leqslant\pi/h}\frac{|e^{ih\omega}-1|^{2k}}{h^{2k}}\,|Fx(\omega)|^2d\omega\Bigg)\to\max,\\ |Fx(\omega)-y(\omega)|^2\leqslant\delta^2\end{gathered}\tag{7}$$

для почти всех $\omega\in(-\sigma,\sigma)$,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h}\frac{|e^{ih\omega}-1|^{2n}}{h^{2n}}\,|Fx(\omega)|^2\,d\omega\leqslant 1.$$

Положим $z(\omega)=Fx(\omega)-y(\omega),|z(\omega)|\leqslant\delta$. Тогда максимизируемое выражение можно представить в виде

$$\begin{gathered}D=\frac{1}{2\pi}\Bigg(\int\limits_{|\omega|<\sigma_0}\left|\left(\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}-\alpha(\omega)\right)\cdot Fx(\omega)+\alpha(\omega)z(\omega)\right|^2d\omega\\ +\int\limits_{\sigma_0\leqslant|\omega|\leqslant\pi/h} g^k(\omega)\big|Fx(\omega)\big|^2d\omega\Bigg)\to\max.\end{gathered}$$

Оценим подынтегральное выражение из первого интеграла, применив неравенство Коши — Буняковского:

$$\left|\left(\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}-\alpha(\omega)\right)\cdot Fx(\omega)+\alpha(\omega)z(\omega)\right|^2$$

$$=\left|\frac{\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}-\alpha(\omega)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_1(\omega)}}\cdot\sqrt{\widehat{\lambda}_1(\omega)}Fx(\omega)+\frac{\alpha(\omega)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2(\omega)}}\cdot\sqrt{\widehat{\lambda}_2(\omega)}z(\omega)\right|^2$$

$$\leqslant\left(\frac{\left|\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}-\alpha(\omega)\right|^2}{\widehat{\lambda}_1(\omega)}+\frac{|\alpha(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_2(\omega)}\right)\cdot\left(\widehat{\lambda}_1(\omega)|Fx(\omega)|^2+\widehat{\lambda}_2(\omega)|z(\omega)|^2\right),$$

где $\widehat{\lambda}_1(\omega)>0$, $\widehat{\lambda}_2(\omega)>0$ для почти всех $\omega<\sigma_0$.

Пусть

$$Q(\omega)=\frac{\left|\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}-\alpha(\omega)\right|^2}{\widehat{\lambda}_1(\omega)}+\frac{|\alpha(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_2(\omega)}\leqslant 1. \tag{8}$$

Тогда значение задачи не больше, чем

$$D\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0}\widehat{\lambda}_1(\omega)|Fx(\omega)|^2\,d\omega+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0}\widehat{\lambda}_2(\omega)|z(\omega)|^2\,d\omega$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_0\leqslant|\omega|\leqslant\pi/h}g^k(\omega)|Fx(\omega)|^2\,d\omega.$$

Пусть

$$\widehat{\lambda}_1(\omega)=\frac{g^n(\omega)}{g^{n-k}(\sigma_0)},\quad \widehat{\lambda}_2(\omega)=g^k(\omega)-\widehat{\lambda}_1(\omega).$$

Тогда

$$D\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0}\frac{g^n(\omega)}{g^{n-k}(\sigma_0)}\,|Fx(\omega)|^2\,d\omega+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_0\leqslant|\omega|\leqslant\pi/h}g^k(\omega)|Fx(\omega)|^2\,d\omega$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0}\left(g^k(\omega)-\frac{g^n(\omega)}{g^{n-k}(\sigma_0)}\right)|z(\omega)|^2\,d\omega.$$

Учитывая, что функция $g^{k-n}(\omega)$ неотрицательная, четная и убывающая при $\omega>0$, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_0\leqslant|\omega|\leqslant\pi/h}g^k(\omega)|Fx(\omega)|^2\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_0\leqslant|\omega|\leqslant\pi/h}g^{k-n}(\omega)\cdot g^n(\omega)|Fx(\omega)|^2\,d\omega$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\,g^{k-n}(\sigma_0)\int\limits_{\sigma_0\leqslant|\omega|\leqslant\pi/h}g^n(\omega)|Fx(\omega)|^2\,d\omega.$$

Таким образом, получаем

$$D\leqslant\frac{g^{k-n}(\sigma_0)}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h}g^n(\omega)|Fx(\omega)|^2\,d\omega+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0}\left(g^k(\omega)-\frac{g^n(\omega)}{g^{n-k}(\sigma_0)}\right)|z(\omega)|^2\,d\omega.$$

Учитывая условия в задаче (7), получаем

$$D \leqslant g^{k-n}(\sigma_0)\cdot\left(1-\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^n(\omega)\,d\omega\right)+\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0} g^k(\omega)\,d\omega.$$

Так как верхняя и нижняя оценки погрешности совпадают, метод $\widehat{m}$ — оптимальный.

Покажем, что условие (8) выполнимо. Пусть

$$\alpha(\omega)=\frac{\widehat{\lambda}_2(\omega)}{\widehat{\lambda}_1(\omega)+\widehat{\lambda}_2(\omega)}\cdot\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}.$$

Тогда

$$Q(\omega)=\frac{\left|\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}-\alpha(\omega)\right|^2}{\widehat{\lambda}_1(\omega)}+\frac{|\alpha(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_2(\omega)}=\frac{g^k(\omega)}{\widehat{\lambda}_1(\omega)+\widehat{\lambda}_2(\omega)}=1,$$

и условие выполняется.

Покажем, что при $\sigma=\frac{\pi}{h}<\widehat{\sigma}$ метод $\widehat{m}:\,L_\infty(-\sigma;\sigma)\to l_{2,h}(\mathbb{Z})$ такой, что

$$F\widehat{m}(y)=\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}\,y(\omega),\quad |\omega|<\frac{\pi}{h}$$

оптимален. В этом случае квадрат задачи (7) имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h}\left|\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}\,Fx(\omega)-\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}\,y(\omega)\right|^2 d\omega\to\max,\\ |Fx(\omega)-y(\omega)|^2\leqslant\delta^2\end{gathered}\tag{9}$$

для почти всех $\omega\in(-\pi/h,\pi/h)$,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h}\frac{|e^{ih\omega}-1|^{2n}}{h^{2n}}\,|Fx(\omega)|^2\,d\omega\leqslant 1.$$

Учитывая ограничения в задаче (9), оценим первый интеграл:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h}\left|\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}\,Fx(\omega)-\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}\,y(\omega)\right|^2 d\omega\\ &=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^k(\omega)|Fx(\omega)-y(\omega)|^2\,d\omega\leqslant\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^k(\omega)\,d\omega.\end{aligned}$$

Верхняя и нижняя оценки снова совпали, метод оптимален.

Пусть

$$\mathscr{W}_2^n(\mathbb{R})=\Big\{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}):\ f^{(n-1)}\in LAC(\mathbb{R}),\,f^{(n)}(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})\Big\}$$

— соболевское пространство, где $LAC(\mathbb{R})$ — множество функций, абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке. Рассмотрим класс функций

$$\mathbb{W}^n_{2,\infty}(\mathbb{R})=\Big\{f(\cdot)\in\mathscr{W}_2^n(\mathbb{R}):\ \|f^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant 1,\,(Ff)(\cdot)\in\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R})\Big\},$$

где $(Ff)(\cdot)$ — преобразование Фурье функции f.

Заметим, что, в пределе при $h \to 0$ k-я разделенная разность последовательности $x \in \mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$ переходит в производную k-го порядка функции $f(\cdot) \in \mathbb{W}^n_{2,\infty}(\mathbb{R})$,

$$\lim_{h\to 0} g(\omega) = \omega^2, \quad \lim_{h\to 0} \widehat{\sigma} = \left(\frac{\pi(2n+1)}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n+1}}.$$

Имеем

$$\lim_{h\to 0} E\big(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta\big) = \begin{cases} \delta\sqrt{\frac{\widehat{\sigma}^{2k+1}}{\pi(2k+1)}}, & \sigma \geqslant \widehat{\sigma}, \\ \delta\sqrt{\left(\frac{\delta^2\sigma^{(2k+1)}}{\pi(2k+1)} + \sigma^{2(k-n)}\Big(1 - \big(\frac{\sigma}{\widehat{\sigma}}\big)^{(2n+1)}\Big)\right)}, & \sigma < \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Величина, стоящая в правой части равенства, совпадает с погрешностью восстановления k-й производной на классе $\mathbb{W}^n_{2,\infty}(\mathbb{R})$ по неточно заданному преобразованию Фурье, полученной в работе [6].

Кроме того, предельный оптимальный метод совпадает с оптимальным методом, полученным для этой задачи в той же работе.

Литература

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: дис. ...канд. физ.-мат. наук.—М.: МГУ, 1965.
2. *Колмогоров А. Н.* Избранные труды. Математика и механика.—М.: Наука, 1985.—470 с.
3. *Никольский С. М.* К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // Успехи мат. наук.—1950.—Т. 5, № 2.—С. 165–177.
4. *Марчук А. Г., Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек // Мат. заметки.—1975.—Т. 17, № 3.—С. 359–368.
5. *Унучек С. А.* Оптимальное восстановление разделенных разностей по неточно заданной последовательности // Диф. уравнения.—2015.—(В печати).
6. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функцион. анализ и его прил.—2003.—Т. 37.—С. 51–64.
7. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди — Литтлвуда — Полиа и восстановление производных по неточной информации // Докл. РАН.—2011.—Т. 438, № 3.—С. 300–302.

Статья поступила 24 февраля 2015 г.

Унучек Светлана Александровна
Московский государственный технический университет
радиотехники, электроники и автоматики,
старший преподаватель
РОССИЯ, 119454, Москва, Проспект Вернадского, 78
E-mail: `unuchek@mirea.ru`

ON OPTIMAL RECOVERY OF THE OPERATOR OF k-th DIVIDED DIFFERENCE FROM ITS INACCURATELY GIVEN FOURIER TRANSFORM

Unuchek S. A.

This paper considers the recovery problem of the k-th divided difference of sequence, provided that the Fourier transform of this sequence on the interval is approximately known. The optimal recovery method is also constructed.

Key words: optimal recovery, extremal problem, divided difference, Fourier transform.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 3, С. 93–100

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

MATH-SELFIE

S. S. Kutateladze

This is a short overview of some sections of applied functional analysis, convexity, optimization, and nonstandard models.

Key words: vector lattice, isoperimetric-type problem, Pareto optimality, ε-programming, Boolean valued analysis, infinitesimal analysis.

1. Introduction

Mathematics is the logic of natural sciences, the unique science of the provable forms of reasoning quantitatively and qualitatively.

Functional analysis had emerged at the junctions of geometry, algebra and the classical calculus, while turning rather rapidly into the natural language of many traditional areas of continuous mathematics and approximate methods of analysis. Also, it has brought about the principally new technologies of theoretical physics and social sciences (primarily, economics and control).

Of most interest for the author are some contiguous sections of the constituents of functional analysis and model theory that are promising in search for modernization of the theoretical techniques of socializing the problems with many solutions.

The traditions of functional analysis were implanted in Siberia by S. L. Sobolev and L. V. Kantorovich.

Their thesis of the unity of functional analysis and applied mathematics was, is, and should be the branding mark of the Russian mathematical school. This is the author's deep belief.

F. Bacon distinquished between pure and mixed mathematics; see [1]. L. Euler used the attribute "pure," which has been in common parlance since then; see [2]. S. Feferman introduced the concept of "scientifically applicable mathematics" as "that part of everyday mathematics which finds its applications in the other sciences"; see [3, p. 30]. In this article applied mathematics is understood according to the Feferman definition.

The main areas dwelt upon below are functional analysis, nonstandard methods of analysis, convex geometry, and optimization. These are listed according to their significance. Each of them remains in the sphere of the author's interests from the moment of the first appearance, but the time spent and the efforts allotted have been changing every now and then. Here these areas are addressed in chronological order.

---

2. Optimal Location of Convex Bodies

Using the ideas of linear programming invented by L. V. Kantorovich, it turned out possible to distinguish some classes of extremal problems of optimal location of convex surfaces that could not be treated by the classical methods in principle. The decisive step forward was to address such a problem by the standard approach of programming which consists in transition to the dual problem. The latter turns out solvable by the technique of mixed volumes, abstraction of the duality ideas of H. Minkowski, and modification of one construction in measure theory that belongs to Yu. G. Reshetnyak [4]. The revealed descriptions of new classes of inequalities over convex surfaces in combination with the technique of surface area measures by A. D. Alexandrov [5] had led to reducing to linear programs the isoperimetric-type problems with however many constraints; i.e., the problems that fall beyond the possibility of symmetrizations. In fact, the extensive class was discovered of the problems whose solutions can be written down explicitly by translating the problems into convex programs in appropriate function spaces. A few of these results are presented in the survey article [6]. The conception of H-convexity from this paper is considered now as definitive in the numerous studies in generalized convexity and search for schemes of global optimization; in particular, see [7].

The most visual and essential progress is connected with studying some abstractions of the Urysohn problem of maximizing the volume of a convex surface given the integral of the breadth of the surface. By the classical result of P. S. Urysohn [8] which was published in the year of his death—1924, this is a ball as follows from the suitable symmetry argument. In the 1970s the functional-analytical approach was illustrated with the example of the *internal Urysohn problem*: Granted the integral breadth, maximize the volume of a convex surface that lies within an a priori given convex body, e.g., a simplex in $\mathbb{R}^N$. The principal new obstacle in the problem is that no symmetry argument is applicable in analogous internal or external problems. It turned out that we may solve the problem in some generalized sense—“modulo” the celebrated Alexandrov Theorem on reconstruction of a convex surface from its surface area measure. For the Urysohn problem within a polyhedron the solution will be given by the Lebesgue measure on the unit sphere with extra point loads at the outer normals to the facets of the polyhedron. The internal isoperimetric problem falls beyond the general scheme even within a tetrahedron.

Considering the case of $N = 3$ in 1995, A. V. Pogorelov found in one of his last papers [9] the shape of the “soup bubble” within a tetrahedron in the same generalized sense—this happens to be the vector sum of a ball and the solution of the internal Urysohn problem. In the recent years quite a few papers has been written about the double bubbles. These studies are also close to the above ideas.

3. Ordered Vector Spaces

Of most importance in this area of functional analysis are the problems stemming from the Kantorovich heuristic principle.

In his first paper of 1935 on the brand-new topic L. V. Kantorovich [10] wrote:

> In this note, I define a new type of space that I call a semiordered linear space. The introduction of such a space allows us to study linear operations of one abstract class (those with values in these spaces) in the same way as linear functionals.

It is worth noting that his definition of semiordered linear space contains the axiom of Dedekind completeness which was denoted by I_6. L. V. Kantorovich demonstrated the role of

K-spaces by widening the scope of the Hahn–Banach Theorem. The heuristic principle turned out applicable to this fundamental Dominated Extension Theorem; i.e., we may abstract the Hahn–Banach Theorem on substituting the elements of an arbitrary K-space for reals and replacing linear functionals with operators acting into the space.

The Kantorovich heuristic principle has found compelling juctifications in his own research as well as in the articles by his students and followers. Attempts at formalizing the heuristic ideas by Kantorovich started at the initial stages of K-space theory and yielded the so-called identity preservation theorems. They asserted that if some algebraic proposition with finitely many function variables is satisfied by the assignment of all real values then it remains valid after replacement of reals with members of an arbitrary K-space. To explain the nature of the Kantorovich transfer principle became possible only after half a century by using the technique of nonstandard models of set theory.

The abstract ideas of L. V. Kantorovich in the area of K-spaces are tied with linear programming and approximate methods of analysis. He wrote about the still-unrevealed possibilities and underestimation of his theory for economics and remarked:

> But the comparison and correspondence relations play an extraordinary role in economics and it was definitely clear even at the cradle of K-spaces that they will find their place in economic analysis and yield luscious fruits.

The problem of the scope of the Hahn–Banach Theorem, tantamount to describing the possible extensions of linear programming, was rather popular in the decade past mid-1970s. Everyone knows that linear programs lose their effectiveness if only integer solutions are sought. S. N. Chernikov abstracted linear programming from the reals to some rings similar to the rationals in [11]. Rather topical in the world mathematical literature was the problem of finding the algebraic systems that admit the full strength of the ideas of L. V. Kantorovich. The appropriate answer was given by describing the abstract modules that allow for the tools equivalent to the Hahn–Banach Theorem; see [12]. These are K-spaces viewed as modules over rather "voluminous" algebras of their orthomorphisms. This result was resonated to some extent in the theoretical background of mathematical economics as relevant to the hypothesis of "divisible goods."

One of the rather simple particular cases of these results is a theorem characterizing a lattice homomorphism. The latter miraculously attracted attention of vector-lattice theorists who founded new proofs and included the theorem in monographs as *Kutateladze's Theorem*; e.g., [13, p. 114]. Many years had elapsed before Boolean valued analysis explained that the modules found are in fact dense subfields of the reals in an appropriate nonstandard model of set theory.

In this area some unexpected generalizations of the Kreĭn–Milman Theorem to noncompact sets had been found that stimulated a few articles on the abstraction of Choquet theory to vector lattices; see [14]. Ordered vector spaces have opened opportunities to advance applications of Choquet theory to several problems of modern potential theory such as describing interconnections of the Dirichlet problem with Bauer's geometric simplices in infinite dimensions and introducing the new objects—supremal generators of function spaces which are convenient in approximation by positive operators. Note that the conception of supremal generation which bases on the computational simplicity of calculating the join of two reals had turned out close to some ideas of idempotent analysis that emerged somewhat later in the research by V. P. Maslov and his students; see [15].

4. Nonsmooth Analysis and Optimization

Note the rather numerous papers on convex analysis, one of the basic sections of nonlinear analysis. Convex analysis is the calculus of linear inequalities. The concept of convex set does not reach the age of 150 years, and convex analysis as a branch of mathematics exists a bit longer than half a century. The solution sets of simultaneous linear inequalities are the same as convex sets which can be characterized by their gauges, support functions or distributions of curvature. Functional analysis is impossible without convexity since the existence of a nonzero continuous linear functional is provided if and only if the ambient space has nonempty proper open convex subsets.

Convex surfaces have rather simple contingencies, and convex functions are directionally differentiable in the natural sense and their derivatives are nonlinear usually in quite a few points. But these points extreme in the direct and indirect senses are most important. Study of the local behavior of possible fractures at extreme points is the subject of subdifferential calculus.

The most general and complete formulas were found for recalculating the values and solutions of rather general convex extremal problems under the changes of variables that preserve convexity. The key to these formulas is the new trick of presenting an arbitrary convex operator as the result of an affine change of variables in a particular sublinear operator, a member of some family enumerated by cardinals. The basic results in this area were published in [16]. The literature uses the term *Kutateladze's canonical operator* (cp. [17, pp. 123–125] and [18, p. 92]). These formulas led to the Lagrange principle for new classes of vector optimization problems and the theory of convex ε-programming. The problem of approximate programming consists in the searching of a point at which the value of a (possibly vector valued) function differs from the extremum by at most some positive error vector ε. The constraints are also given to within some accuracy of the order of ε. The standard differential calculus is inapplicable here, but the new methods of subdifferential calculus solve many problems of the sort. These results became rather topical, entered textbooks, and were redemonstrated with reference to the Russian priority. The literature uses the term *Kutateladze's approximate solutions* (for instance, cp. [19]). Many years later the help of infinitesimal analysis made it possible to propose the tricks that are not connected with the bulky recalculations of errors. To this end, the error should be considered as an infinitesimal, which is impossible within the classical set-theoretic stance.

Applications to nonsmooth analysis are connected primarily with inspecting the behavior of the contingencies of general rather than only convex correspondences. In this area there were found some new rules for calculating various types of tangents and one-sided directional derivatives. The advances in these areas base on using the technique of model theory as well.

Many extremal problems are studied in various branches of mathematics, but they use only scalar target functions. Multiple criteria problems have appeared rather recently and beyond the realm of mathematics. This explains the essential gap between the complexity and efficiency of the mathematical tools which divides single and multiple criteria problems. So it stands to reason to enrich the stock of purely mathematical problems of vector optimization. The author happened to distinguish some class of geometrically reasonable problems of vector optimization whose solutions can be presented in a relatively lucid form of conditions for surface area measures. As model examples, the Urysohn problems were considered with extra targets like flattening in a given direction, symmetry, or optimization of the volume of the convex hulls of several surfaces; see [20] and [21].

5. New Models for Mathematical Analysis

In the recent decades much research is done into the nonstandard methods located at the junctions of analysis and logic. This area requires the study of some new opportunities of modeling that open broad vistas for consideration and solution of various theoretical and applied problems.

A model of a mathematical theory is usually called nonstandard if the membership within the model has interpretation different from that of set theory. This understanding is due to L. Henkin. The simplest example of nonstandard modeling is the classical trick of presenting reals as points of an axis.

The new methods of analysis are the adaptation of nonstandard set theoretic models to the problems of analysis. The two technologies are most popular: infinitesimal analysis also known as Robinsonian nonstandard analysis and Boolean valued analysis.

Infinitesimal analysis by A. Robinson appeared in 1960 and is characterized by legitimizing the usage of actual infinities and infinitesimals which were forbidden for the span of about thirty years in the mathematics of the twentieth century. In a sense, nonstandard analysis implements a partial modern return to the classical infinitesimal analysis. The recent publications in this area can be partitioned into the two groups: The one that is most proliferous uses infinitesimal analysis for "killing quantifiers," i.e., simplifying definitions and proofs of the classical results. The other has less instances but contributes much more to mathematics, searching the opportunities unavailable to the standard methods; i.e., it develops the technologies whose description is impossible without the new syntax based on the predicate of standardness. We should list here the development of the new schemes for replacing the infinite objects as parts of finite sets: nonstandard hulls, Loeb measures, hyperapproximation, etc. Part of this research is done in Novosibirsk. In particular, the author's results on infinitesimal programming [22] belong to the second group.

Boolean valued analysis is characterized by the terms like Boolean valued universe, descents and ascents, cyclic envelopes and mixings, Boolean sets and mappings, etc. The technique here is much more complicated that of infinitesimal analysis and just a few analysis are accustomed to it. The rise of this branch of mathematical logic was connected with the famous P.-J. Cohen's results of 1961 on the independence of the continuum hypothesis, whose understanding drove D. Scott, R. Solovay, and P. Vopěnka to the construction of the Boolean valued models of set theory.

D. Scott foresaw the role of Boolean valued models in mathematics and wrote as far back as in 1969 (see [23, p. 91]):

> We must ask whether there is any interest in these nonstandard models aside from the independence proof; that is, do they have any mathematical interest? The answer must be yes, but we cannot yet give a really good argument.

G. Takeuti was one of the first who pointed out the role of these models for functional analysis (in Hilbert space) and minted the term *Boolean valued analysis* in [24]. The models of infinitesimal analysis can be viewed among the simplest instances of Boolean valued universes.

The progress of Boolean valued analysis in the recent decades has led to a profusion of principally new ideas and results in many areas of functional analysis, primary, in the theory of Dedekind complete vector lattices and the theory of von Neumann algebras as well as in convex analysis and the theory of vector measures. Most of these advances are connected with Novosibirsk and Vladikavkaz; see [25]–[27]. It is not an exaggeration to say that Boolean valued analysis left the realm of logic and has become a section of order analysis.

The new possibilities reveal the exceptional role of universally complete vector lattices—extended K-spaces in the Russian literature. It was completely unexpected that each of them turns out to be a legitimate model of the real axis, so serving the same fundamental role in mathematics as the reals. Kantorovich spaces are indeed instances of the models of the reals, which corroborated the heuristic ideas of L. V. Kantorovich. This remarkable result was discovered by E. I. Gordon [28].

Adaptation of nonstandard models to the problems of analysis occupies the central place in the research of the author and his closest colleagues. In this area we have developed the special technique of ascending and descending, gave the criteria of extensional algebraic systems, suggested the theory of cyclic monads, and indicated some approaches to combining infinitesimal and Boolean valued models.

These ideas lie behind solutions of various problems of geometric and applied functional analysis among which we list the drastically new classification of the Clarke type one-sided approximations to arbitrary sets and the corresponding rules for calculating infinitesimal tangents, the nonstandard approach to approximate solutions of convex programs in the form of *infinitesimal programming*, the new formulas for projecting to the principal bands of the space of regular operators which are free from the usual limitations on the order dual, etc.

We can also mention the new method of studying some classes of bounded operators by the properties of the kernels of their strata. This method bases on applying the Kantorovich heuristic principle to the folklore fact that a linear functional can be restored from each of its hyperplanes to within a scalar multiplier. In 2005 this led to the description of the operator annihilators of Grothendieck spaces; see [29]. In 2010 the method made it possible to suggest the operator forms of the classical Farkas Lemma in the theory of linear inequalities, so returning to the origins of linear programming; see [30] and [31].

Of great importance in this area are not only applications but also inspections of the combined methods that involve Boolean valued and infinitesimal techniques. At least the two approaches are viable: One consists in studying a standard Boolean valued model within the universes of Nelson's or Kawai's theory. Infinitesimals descend there from some external universe. The other bases on distinguishing infinitesimals within Boolean valued models. These approaches were elaborated to some extent, but the synthesis of the tools of various versions of nonstandard analysis still remain a rather open problem.

Adaptation of the modern ideas of model theory to functional analysis projects among the most important directions of developing the synthetic methods of pure and applied mathematics. This approach yields new models of numbers, spaces, and types of equations. The content expands of all available theorems and algorithms. The whole methodology of mathematical research is enriched and renewed, opening up absolutely fantastic opportunities. We can now use actual infinities and infinitesimals, transform matrices into numbers, spaces into straight lines, and noncompact spaces into compact spaces, yet having still uncharted vast territories of new knowledge.

Quite a long time had passed until the classical functional analysis occupied its present position of the language of continuous mathematics. Now the time has come of the new powerful technologies of model theory in mathematical analysis. Not all theoretical and applied mathematicians have already gained the importance of modern tools and learned how to use them. However, there is no backward traffic in science. The modern methods are doomed to reside in the realm of mathematics for ever, and they will shortly become as elementary and omnipresent in calculuses and calculations as Banach spaces and linear operators.

References

1. *Bacon F.* The Tvvoo Bookes of Francis Bacon, of the Proficience and Aduancement of Learning, Diuine and Humane. To the King.—London: Printed for Henrie Tomes, 1605.—URL: `http://ebooks.adelaide.edu.au/b/bacon/francis/b12a/complete.html`
2. *Euler L.* Specimen de Usu Observationum in Mathesi Pura // Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae.—1761.—Vol. 6.—P. 185–230.—URL: `http://eulerarchive.maa.org/pages/E256.html`.
3. *Feferman S.* In Light of Logic.—N. Y. and Oxford: Oxford University Press, 1998.
4. *Reshetnyak Yu. G.* On the Length and Swerve of a Curve and the Area of a Surface (PhD Thesis).—Leningrad: Leningrad State University, 1954.—[in Russian].
5. *Alexandrov A. D.* Selected Works. Vol. 1: Geometry and Applications.—Novosibirsk: Nauka, 2006.—[in Russian].
6. *Kutateladze S. S. and Rubinov A. M.* Minkowski Duality and Its Applications // Russian Math. Surveys.—1972.—Vol. 27, № 3.—P. 137–191.
7. *Singer I.* Abstract Convex Analysis.—N. Y.: John Wiley, 1997.
8. *Urysohn P. S.* Dependence Between the Average Width and Volume of Convex Bodies // Mat. Sb.–1924.—Vol. 31, № 3.—P. 477–486.—[in Russian].
9. *Pogorelov A. V.* Imbedding a ‘Soap Bubble’ into a Tetrahedron // Math. Notes.—1994.—Vol. 56, № 2.—P. 824–826.
10. *Kantorovich L. V.* On Semiordered Linear Spaces and Their Applications in the Theory of Linear Operators // Dokl. Akad. Nauk SSSR.—1935.—Vol. 4, № 1–2.—P. 11–14.—[in Russian].
11. *Chernikov S. N.* Linear Inequalities.—Moscow: Nauka, 1968.—[in Russian].
12. *Kutateladze S. S.* Modules Admitting Convex Analysis // Soviet Math. Dokl.—1980.—Vol. 21, № 3.—P. 820–823.
13. *Aliprants Ch. and Birkinshaw Ow.* Positive Operators.—Orlando etc.: Academic Press, 1985.
14. *Kutateladze S. S.* Choquet Boundaries in K-Spaces // Russian Math. Surveys.—1975.—Vol. 30, № 4.—P. 115–155.
15. *Kolokol’tsov V. N. and Maslov V. P.* Idempotent Analysis as a Tool of Control Theory and Optimal Synthesis. I // Funct. Anal. Appl.—1989.—Vol. 23, № 1.—P. 1–11.
16. *Kutateladze S. S.* Convex Operators // Russian Math. Surveys.—1979.—Vol. 34, № 1.—P. 181–214.
17. *Rubinov A. M.* Sublinear Operators and Their Applications // Russian Math. Surveys.—1977.—Vol. 32, № 4.—P. 115–175.
18. *Tikhomirov V. M.* Convex Analysis // Current Problems in Mathematics. Fundamental Trends.—Moscow: VINITI, 1987.—Vol. 14.—P. 5–101.—[in Russian].
19. *Gutiérrez C., Jiménez B., and Novo V.* On Approximate Solutions in Vector Optimization Problems via Scalarization // Computat. Optim. Appl.—2006.—Vol. 35.—P. 305–324.
20. *Kutateladze S. S.* Multiobjective Problems of Convex Geometry // Sib. Math. J.—2009.—Vol. 50, № 5.—P. 887–897.
21. *Kutateladze S. S.* Multiple Criteria Problems over Minkowski Balls // J. Appl. Indust. Math.—2013.—Vol. 7, № 2.—P. 208–214.
22. *Kutateladze S. S.* A Variant of Nonstandard Convex Programming // Sib. Math. J.—1986.—Vol. 27, № 4.—P. 537–544.
23. *Scott D.* Boolean Models and Nonstandard Analysis // Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability.—New York: Holt, Rinehart and Winston, 1969.—P. 87–92.
24. *Takeuti G.* Two Applications of Logic to Mathematics.—Tokyo and Princeton: Iwanami Publ. & Princeton Univ. Press, 1978.
25. *Kusraev A. G. and Kutateladze S. S.* Introduction to Booolean Valued Analysis.—Moscow: Nauka, 2005.—[in Russian].
26. *Gordon E. I., Kusraev A. G., and Kutateladze S. S.* Infinitesimal Analysis: Selected Topics.—Moscow: Nauka, 2011.—[in Russian].
27. *Kusraev A. G. and Kutateladze S. S.* Boolean Valued Analysis: Selected Topics.—Vladikavkaz: Southern Math. Institute, 2014.
28. *Gordon E. I.* Real numbers in Boolean-valued models of set theory and K-spaces // Dokl. Akad. Nauk SSSR.—1977.—Vol. 237, № 4.—P. 773–775.
29. *Kutateladze S. S.* On Grothendieck Subspaces // Sib. Math. J.—2005.—Vol. 46, № 3.—P. 489–493.
30. *Kutateladze S. S.* The Farkas Lemma Revisited // Sib. Math. J.—2010.—Vol. 51, № 1.—P. 78–87.
31. *Kutateladze S. S.* The Polyhedral Lagrange Principle // Sib. Math. J.—2011.—Vol. 52, № 3.—P. 484–486.

Received June 6, 2015.

Kutateladze Semen Samsonovich
Sobolev Institute of Mathematics, *senior staff scientist*
4 Koptyug Avenue, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail: `sskut@math.nsc.ru`

МАТСЕЛФИ

Кутателадзе С. С.

Краткое обсуждение некоторых разделов выпуклой геометрии, функционального анализа, оптимизации и нестандартных моделей в сфере интересов автора.

Ключевые слова: выпуклые задачи изопериметрического типа, Парето-оптимальность, ε-программирование, булевозначный анализ, инфинитезимальный анализ.

Вниманию авторов

Владикавказский математический журнал (ВМЖ) — научное периодическое издание, выходящее четыре раза в год. Журнал издается Южным математическим институтом Владикавказского научного центра РАН.

К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Поступившие в редакцию ВМЖ статьи проходят обязательное научное рецензирование.

Текст статьи должен быть написан на русском или английском языке и тщательно выверен. В начале статьи указывается индекс УДК, Ф.И.О. автора(ов), аннотация (не содержащая формул) и ключевые слова. Название статьи, Ф.И.О. автора(ов), аннотацию и ключевые слова необходимо дать на русском и английском языках.

Список литературы печатается в конце текста статьи. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках. Для статей на русском языке список литературы приводится также на английском языке (подробнее на сайте `http://www.vmj.ru/`).

Статья подписывается автором (коллективом авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса, места работы, должности, полного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона.

Объем материала должен быть не более 1,4 усл. печ. листов ($\approx$ 12 стр. формата А4). Статьи большего объема могут быть приняты к публикации по решению редколлегии в исключительных случаях.

Статью необходимо подготовить с использованием макропакета LaTeX и оформить согласно стандартным требованиям, предъявляемым к авторским оригиналам. При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела. В редакцию статьи направлять по электронной почте в виде ps- или pdf-файла и tex-файла, либо по почте с приложением электронной версии.

Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего текст статьи направляется автору на корректуру. Плата за публикацию не взымается.

Авторские права на журнал в целом принадлежат Южному математическому институту ВНЦ РАН и Редколлегии журнала, которые обладают исключительным правом получать и распределять любые платежи, связанные с переуступкой авторских прав на журнал.

Адрес редакции: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 53 84 62;
E-mail: `rio@smath.ru`
Зав. редакцией: Кибизова В. В.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 17

Выпуск 3

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-50223 от 15 июня 2012 г.

Подписано в печать 16.09.2015. Формат бумаги $60\times84^1/_8$.
Гарн. шрифта Computer modern. Усл. п. л. 11,63. Тираж 100 экз.

Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.