Владикавказский математический журнал
2024, Том 26, Выпуск 1, С. 123–131

УДК 517.956
DOI 10.46698/u2023-1977-8822-o

ОТСУТСТВИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ТИПА ГАУССА

А. В. Неклюдов[1]

[1] Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Россия, 105005, Москва, Рубцовская наб., 2/18
E-mail: `nekl5@yandex.ru`

Аннотация. Рассматриваются решения двумерного уравнения четвертого порядка с бигармоническим оператором и экспоненциальной относительно решения нелинейностью, являющегося аналогом классического уравнения второго порядка Гаусса — Бибербаха — Радемахера, которое ранее рассматривалось многими авторами в связи с задачами геометрии поверхностей с отрицательной гауссовой кривизной, динамики разреженного газа, теории автоморфных функций. Получены условия, при которых решение не может существовать в круге достаточно большого радиуса. Показано, что глобальные решения на плоскости могут существовать, только если коэффициент при нелинейности вырождается в бесконечности со скоростью не меньше, чем $\exp\{-|x|^2\ln|x|\}$. Показано, что в противном случае среднее значение решения на окружности радиуса r должно было бы расти к $+\infty$ с экспоненциальной скоростью при $r\to\infty$. Методом нелинейной емкости Похожаева — Митидиери, основанного на выборе подходящих срезающих пробных функций, доказывается невозможность существования такого растущего глобального решения. Также для решений в $\mathbb{R}^n$, периодических по всем переменным, кроме одной переменной x_1, аналогичными методами получено отсутствие глобальных решений при вырождении коэффициента при нелинейности со скоростью, медленней, чем $\exp\{-x_1^3\}$.

Ключевые слова: бигармонический оператор, уравнение типа Гаусса, глобальные решения, экспоненциальная нелинейность, разрушение решений.

AMS Subject Classification: 35J15.

Образец цитирования: *Неклюдов А. В.* Отсутствие глобальных решений уравнения четвертого порядка типа Гаусса // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 1.—С. 123–131. DOI: 10.46698/u2023-1977-8822-o.

1. Введение. Основные обозначения и определения. Вспомогательные утверждения

Вопрос об отсутствии глобальных решений (о разрушении решений) уравнения Гаусса $\Delta u = k(x)e^u$, где $k(x) > 0$, и его обобщений рассматривался ранее различными авторами [1–7]. Условия разрушения решений для такого уравнения сводятся к отсутствию достаточно быстрого вырождения в бесконечности коэффициента $k(x)$.

Бигармоническое уравнение с экспоненциальной нелинейностью $\Delta^2 u = k(x)e^u$, $x\in\mathbb{R}^n$, ранее рассматривалось во многих работах. Вопрос о существовании глобальных решений рассматривался ранее в основном для радиально симметричных решений и при

$k(x) = \mathrm{const} > 0$. В [8] получено отсутствие глобальных решений соответствующего одномерного уравнения; при $n = 2, 3$ — отсутствие глобальных радиальных решений, удовлетворяющих условию $e^u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Для $n = 4$ установлено [9], что, если $e^u \in L^1(\mathbb{R}^4)$, то решение является радиально симметричным относительно некоторой точки при условии $u = o(|x|^2)$, или может отличаться от радиально симметричного на квадратичную функцию без этого условия. Существование таких нерадиальных решений показано в [10]. Для размерностей, превышающих порядок уравнения, т. е. при $n \geqslant 5$, глобальные решения также существуют, хотя их свойства различны [8, 11] для «малых» размерностей $5 \leqslant n \leqslant 12$ и «больших» $n \geqslant 13$.

Рассматриваемое в данной работе нелинейное бигармоническое уравнение с экспоненциальной нелинейностью

$$\Delta^2 u = k(x)e^u, \tag{1}$$

$k(x) > 0$, является обобщением классического уравнения Гаусса, или Гаусса — Бибербаха — Радемахера второго порядка. Рассматриваются классические решения уравнения (1), т. е. принадлежащие классу C^4. Положительная функция $k(x)$ предполагается непрерывной. Получены условия типа недостаточно быстрого вырождения коэффициента при нелинейном члене на бесконечности, достаточные для отсутствия глобальных решений. Аналогичные условия получены для решений в $\mathbb{R}^n$, периодических по всем переменным, кроме одной. Доказательства проводятся с использованием дифференциальных неравенств, которым удовлетворяют средние значения решений, и метода нелинейной емкости [12].

Отметим, что на рассматриваемые решения не налагаются никакие ограничения по их структуре или поведению типа радиальной симметрии или конечности интеграла $\int e^u\,dx$.

Введем обозначения: $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $Q_r = \{x : |x| < r\}$, $S_r = \{x : |x| = r\}$.

Пусть $\overline{u}(r) = \overline{u}(|x|)$ — среднее значение функции $u(x)$ на окружности S_r:

$$\overline{u}(r) = \frac{1}{2\pi r}\int\limits_{S_r} u\,ds.$$

Легко видеть, что, что для функций класса C^1

$$\overline{u}'(r) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dr}\left(\int\limits_0^{2\pi} u(r,\theta)\,d\theta\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}\,d\theta = \frac{1}{2\pi r}\int\limits_{S_r}\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds, \tag{2}$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичная внешняя нормаль к окружности S_r; здесь (r, θ) — полярные координаты.

Очевидно, что для любой радиально симметричной функции $\psi(|x|)$ и любой функции $v(x)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{Q_b\setminus Q_a} \psi(|x|)v(x)\,dx = 2\pi\int\limits_a^b r\psi(r)\overline{v}(r)\,dr. \tag{3}$$

Хорошо известно [13], что для функций класса C^2 оператор усреднения функции по сфере и оператор Лапласа коммутируют, т. е.

$$\overline{\Delta u} = \Delta\overline{u}. \tag{4}$$

Тогда из (2) и (4) получаем

$$\int\limits_{S_r} \frac{\partial}{\partial\nu}\bigl(\Delta u\bigr)\,ds = 2\pi r\bigl(\Delta\overline{u}\bigr)'. \tag{5}$$

Будем также использовать интегральное неравенство Иенсена для e^u, как выпуклой функции от u:

$$e^{\overline{u}(r)} \leqslant \frac{1}{2\pi r}\int\limits_{S_r} e^u\,ds.$$

2. Отсутстие глобальных решений на плоскости

Лемма 1. *Пусть $u(x)$ — глобальное решение уравнения* (1) *в $\mathbb{R}^2$, пусть также для всех $x \in \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство $k(x) \geqslant k_0 \exp\{-\alpha(r)r^2\ln r\}$, $r = |x|$, $k_0 = \mathrm{const} > 0$, $\alpha(r) > 0$, $\alpha(r) \to 0$ при $r \to +\infty$. Тогда при всех $r > r_0 = \mathrm{const}$ справедливо неравенство*

$$\overline{u}(r) > e^r.$$

$\lhd$ Проинтегрируем уравнение (1) по кругу Q_r:

$$\int\limits_{S_r} \frac{\partial}{\partial\nu}\bigl(\Delta u\bigr)\,ds = \int\limits_{Q_r} k(x)e^u\,dx,$$

или согласно (5)

$$r\bigl(\Delta\overline{u}\bigr)' = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{Q_r} k(x)e^u\,dx > c_0 = \mathrm{const} > 0, \tag{6}$$

$r \geqslant 1$; здесь и далее $c_i = \mathrm{const} > 0$. Интегрируя от 1 до r, получим

$$\frac{1}{r}\bigl(r\overline{u}'(r)\bigr)' \equiv \Delta\overline{u} > \tilde{c}_0\ln r, \quad r > r_1 = \mathrm{const} > 0.$$

Тогда

$$\bigl(r\overline{u}'(r)\bigr)' \geqslant \tilde{c}_0 r\ln r, \quad r > r_1,$$

интегрируя от r_1 до r, получаем

$$r\overline{u}'(r) \geqslant c_1 r^2\ln r, \quad r > r_2 = \mathrm{const} > 0.$$

Интегрируя неравенство $\overline{u}' > c_1 r\ln r$ от r_2 до r, получим

$$\overline{u} > c_2 r^2\ln r, \quad r > r_3 = \mathrm{const} > 0. \tag{7}$$

Еще раз используя (6), получим с учетом оценки снизу для $k(x)$, интегрального неравенства Йенсена и неравенства (7), что при $r > r_3$

$$r\bigl(\Delta\overline{u}\bigr)' \geqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{r_3}^{r}\Biggl(\int\limits_{S_\rho} k(x)e^u\,ds\Biggr)d\rho \geqslant \frac{k_0}{2\pi}\int\limits_{r_3}^{r}\exp\bigl\{-\alpha(\rho)\rho^2\ln\rho\bigr\}\Biggl(\int\limits_{S_\rho} e^u\,ds\Biggr)d\rho$$

$$\geqslant k_0\int\limits_{r_3}^{r}\rho\exp\bigl\{-\alpha(\rho)\rho^2\ln\rho\bigr\}e^{\overline{u}(\rho)}\,d\rho \geqslant c_3\int\limits_{r_3}^{r}\rho\exp\bigl\{-\alpha(\rho)\rho^2\ln\rho + c_2\rho^2\ln\rho\bigr\}\,d\rho.$$

Если $r_4 > \max\{r_3, e\}$ таково, что $\alpha(\rho) < c_2/2$ при $\rho > r_4$, то из предыдущего неравенства получаем, что при $r > r_4$

$$r\big(\Delta\overline{u}\big)' \geqslant c_3 \int\limits_{r_4}^{r} \rho \exp\left\{\frac{1}{2}c_2\rho^2 \ln\rho\right\} d\rho \geqslant c_3 \int\limits_{r_4}^{r} \rho \exp\left\{\frac{1}{2}c_2\rho^2\right\} d\rho.$$

Отсюда при $r > r_5 = \mathrm{const} > 0$ имеем

$$\big(\Delta\overline{u}\big)' \geqslant \frac{c_4 \exp\left\{\frac{1}{2}c_2 r^2\right\}}{r} \geqslant c_4 \exp\left\{\frac{1}{3}c_2 r^2\right\} \geqslant e^{2r}.$$

Интегрируя, как и выше при переходе от (6) к (7), получаем $\overline{u}(r) > e^r$ при $r > r_0 = \mathrm{const}$. $\rhd$

В дальнейшем будет достаточно использовать оценку

$$\overline{u}(r) > r^{\gamma}, \quad \gamma = \mathrm{const} > 2. \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть для всех* $x \in \mathbb{R}^2$ *выполнено неравенство*

$$k(x) \geqslant k_0 \exp\big\{-\alpha(r) r^2 \ln r\big\},$$

$k_0 = \mathrm{const} > 0$, $r = |x|$, $\alpha(r) > 0$, $\alpha(r) \to 0$ *при* $r \to +\infty$. *Тогда не существует глобального решения уравнения* (1) *на плоскости.*

$\lhd$ Рассмотрим неотрицательную функцию $\varphi(t) \in C^4[0, +\infty)$ такую, что $\varphi(t) = 1$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$; $0 < \varphi(t) < 1$ при $1 < t < 2$; $\varphi(t) = 0$ при $t \geqslant 2$; при этом для ее производных при $1 \leqslant t \leqslant 2$ выполнены неравенства

$$\big(\varphi^{(j)}(t)\big)^2 \leqslant c_0 \varphi(t), \tag{9}$$

$j = 1, 2, 3, 4$; $c_0 = \mathrm{const} > 0$. Эти неравенства выполнены, например, если $\varphi(t) = (2-t)^{\varkappa}$ при $2-\delta \leqslant t \leqslant 2$, $\varkappa \geqslant 8$, $0 < \delta < 1$, и функция $\varphi(t)$ монотонно убывает при $1 \leqslant t \leqslant 2-\delta$. Неравенство (9) тогда очевидно при $2-\delta \leqslant t \leqslant 2$. При $1 \leqslant t \leqslant 2-\delta$ неравенство (9) выполнено для некоторой постоянной $c_0 > 0$ в силу равномерной отделенности функции $\varphi(t)$ от нуля при $1 \leqslant t \leqslant 2-\delta$.

Пусть $\varphi_N(t) = \varphi(t/N)$, $N \in \mathbb{N}$. Умножим обе части уравнения (1) на $\varphi_N(|x|)$ и проинтегрируем по кругу Q_{2N}. Учитывая, что для любой радиально симметричной функции $\psi(|x|)$ справедливо равенство

$$\Delta^2\psi(|x|) = \sum_{j=1}^{4} a_j \psi^{(j)}(|x|)|x|^{j-4}, \quad a_j = \mathrm{const},$$

получаем, интегрируя по частям, учитывая (3) и простейшее неравенство $a \leqslant a^2/2+1/2$,

$$\int\limits_{Q_{2N}} k(x)e^{u(x)}\varphi_N(|x|)\,dx = \int\limits_{Q_{2N}\setminus Q_N} u(x)\Delta^2\varphi_N(|x|)\,dx$$

$$= \int\limits_{Q_{2N}\setminus Q_N} u(x)\sum_{j=1}^{4} a_j\varphi_N^{(j)}(|x|)|x|^{j-4}\,dx = \int\limits_{Q_{2N}\setminus Q_N} u(x)\sum_{j=1}^{4} a_j\varphi^{(j)}\big(|x|/N\big)N^{-j}|x|^{j-4}\,dx$$

$$= 2\pi\int\limits_{N}^{2N} r\overline{u}(r)\sum_{j=1}^{4} a_j\varphi^{(j)}\big(r/N\big)N^{-j}r^{j-4}\,dr \leqslant c_1N^{-4}\int\limits_{N}^{2N} r|\overline{u}(r)|\sum_{j=1}^{4}\big|\varphi^{(j)}(r/N)\big|\,dr$$

$$\leqslant c_2N^{-4}\left(\int\limits_{N}^{2N} r\overline{u}^2(r)\sum_{j=1}^{4}\big(\varphi^{(j)}(r/N)\big)^2\,dr + \int\limits_{N}^{2N} r\,dr\right).$$

Учитывая оценки (9) производных срезающей функции φ, получаем

$$\int\limits_{Q_{2N}} k(x)e^{u(x)}\varphi_N(|x|)\,dx \leqslant c_3N^{-4}\left(\int\limits_{N}^{2N} r\overline{u}^2(r)\varphi(r/N)\,dr + N^2\right). \tag{10}$$

Учитывая оценку среднего значения (8) и интегральное неравенство Иенсена, получим, что при $N \leqslant r \leqslant 2N$, $N \geqslant N_0 = \mathrm{const}$,

$$r\overline{u}^2(r) \leqslant re^{\overline{u}(r)/2} = re^{-\overline{u}(r)/2}e^{\overline{u}(r)} \leqslant r\exp\{-N^\gamma/2\}e^{\overline{u}(r)} \leqslant \exp\{-N^\gamma/2\}(2\pi)^{-1}\int\limits_{S_r} e^{u(x)}\,ds.$$

Тогда из (10), учитывая, что при $x \in Q_{2N}\setminus Q_N$ имеем $k(x) \geqslant c\exp\big\{-(2N)^2\ln(2N)\times \sup_{N\leqslant t\leqslant 2N}\alpha(t)\big\}$, $c = \mathrm{const} > 0$, получаем, что

$$\int\limits_{Q_{2N}} k(x)e^{u(x)}\varphi_N(|x|)\,dx \leqslant c_4N^{-4}\left(\exp\{-N^\gamma/2\}\int\limits_{Q_{2N}\setminus Q_N} e^{u(x)}\varphi_N(|x|)\,dx + N^2\right)$$

$$\leqslant c_5N^{-4}\left(\exp\Big\{-N^\gamma/2 + (2N)^2\ln(2N)\cdot\sup_{N\leqslant t\leqslant 2N}\alpha(t)\Big\}\int\limits_{Q_{2N}\setminus Q_N} k(x)e^{u(x)}\varphi_N(|x|)\,dx + N^2\right).$$

Отсюда при $\gamma > 2$ и $N > N(\gamma)$ получим

$$\int\limits_{Q_{2N}} k(x)e^{u(x)}\varphi_N(|x|)\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{2N}\setminus Q_N} k(x)e^{u(x)}\varphi_N(|x|)\,dx + c_5N^{-2},$$

т. е.

$$\int\limits_{Q_{2N}} k(x)e^{u(x)}\varphi_N(|x|)\,dx \leqslant 2c_5N^{-2} \to 0, \quad N\to\infty.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} k(x)e^{u(x)}\,dx = 0,$$

что невозможно, так как $k(x) > 0$. Полученное противоречие означает, что глобального решения не существует. $\rhd$

Значительный «зазор» между доказанной в лемме 1 экспоненциальной оценкой снизу для среднего значения $\overline{u}(r)$ и реально используемой в доказательстве теоремы 1 степенной оценкой (8) может создать впечатление возможности существенного ослабления условия на коэффициент $k(x)$. Однако оценка снизу для коэффициента $k(x)$ в теореме 1, лемме 1, требуемая и для выполнения неравенства (8), не может быть улучшена в следующем смысле. Она не может быть заменена на оценку $k(x) \geqslant c_1 \exp\{-c_2 r^2 \ln r\}$, $r = |x|$, $c_1, c_2 = \mathrm{const} > 0$. Контрпримером может служить функция $u(x) = (r^2+1)\ln(r^2+1)$, для которой

$$\Delta^2 u = \frac{32}{(r^2+1)^3} = k(x)e^u,$$

где

$$k(x) = \frac{32 \exp\big\{-(r^2+1)\ln(r^2+1)\big\}}{(r^2+1)^3}.$$

3. Отсутствие в $\mathbb{R}^n$ глобальных решений, периодических по всем переменным, кроме одной

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, \widehat{x}) \in \mathbb{R}^n$, $\widehat{x} = (x_2, \ldots, x_n)$, $\Omega = \{x : -\infty < x_1 < +\infty,\ 0 < x_i < 1,\ i = 2, \ldots, n\}$, $\Omega(a,b) = \Omega \cap \{x : a < x_1 < b\}$, $S_t = \Omega \cap \{x : x_1 = t\}$, $\overline{u}(t) = \int_{S_t} u(x)\, d\widehat{x}$. Будем рассматривать 1-периодические по $x_2, \ldots, x_n$ решения уравнения (1). Функция $k(x)$ предполагается 1-периодической по $x_2, \ldots, x_n$. По существу будут рассматриваться решения уравнения (1) в бесконечном в обе стороны цилиндре Ω с граничными условиями периодичности на боковой поверхности.

Интегральное неравенство Иенсена по S_t имеет вид

$$e^{\overline{u}(t)} \leqslant \int\limits_{S_t} e^u\, d\widehat{x}.$$

Лемма 2. *Пусть $u(x)$ — глобальное 1-периодическое по $x_2, \ldots, x_n$ решение уравнения (1), где $k(x) > 0$ — 1-периодическая по $x_2, \ldots, x_n$ функция. Пусть также для некоторого t^* выполнено неравенство $\overline{u}'''(t^*) \geqslant 0$. Тогда для всех $t \geqslant t_0 = \mathrm{const}$ справедлива оценка*

$$\overline{u}(t) \geqslant c_0 t^3, \quad c_0 = \mathrm{const} > 0.$$

$\lhd$ Без ограничения общности можно считать, что $t^* = 0$. Проинтегрируем уравнение (1) по $\Omega(0,t)$, где $t > 0$:

$$\overline{u}'''(t) = \overline{u}'''(0) + \int\limits_{\Omega(0,t)} k(x)e^u\, dx.$$

Используя неравенство $\overline{u}'''(0) \geqslant 0$, получим при $t \geqslant 1$

$$\overline{u}'''(t) \geqslant \int\limits_{\Omega(0,t)} k(x)e^u\, dx \geqslant c_1 = \mathrm{const} > 0.$$

Отсюда следует утверждение леммы при $t \geqslant t_0 = \mathrm{const} > 0$. $\rhd$

Теорема 2. *Пусть для всех $x \in \mathbb{R}^n$ 1-периодическая по $x_2, \ldots, x_n$ функция $k(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$k(x) \geqslant k_0 \exp\{-\alpha(x_1)|x_1|^3\},$$

где $\alpha(x_1) > 0$, $\alpha(x_1) \to 0$ при $x_1 \to \pm\infty$; $k_0 = \mathrm{const} > 0$. Тогда не существует глобального 1-периодического по $x_2, \ldots, x_n$ решения уравнения (1).

◁ Пусть такое решение $u(x)$ существует. Предположим, что

$$\overline{u}'''(0) \geqslant 0.$$

Очевидно, что $\overline{u}'''(t) > 0$ для всех $t > 0$. Из леммы 2 получаем, что $e^{\overline{u}(t)/2} > \overline{u}^2(t)$ при $t > t_0$. Тогда, интегрируя уравнение (1) по S_t и применяя интегральное неравенство Йенсена, получаем

$$\overline{u}^{(4)}(t) = \int\limits_{S_t} k(x) e^u \, d\widehat{x} \geqslant k_0 \exp\{-\alpha(t)t^3\} \int\limits_{S_t} e^u \, d\widehat{x}$$
$$\geqslant k_0 \exp\{-\alpha(t)t^3\} e^{\overline{u}(t)} > e^{\overline{u}(t)/2} > \overline{u}^2(t), \quad t \geqslant t_1 > 0.$$

В [12, с. 10–11] методом нелинейной емкости показано, что функция $\overline{u}(t)$, удовлетворяющая неравенству $\overline{u}^{(4)}(t) \geqslant \overline{u}^2(t)$ при $t \geqslant t_1 > 0$, может быть определена на полупрямой $t > t_1$ только при условии $\overline{u}'''(t_1) < 0$, что невозможно при условии $\overline{u}'''(0) \geqslant 0$. Итак, $\overline{u}'''(0) < 0$. Сделав в уравнении (1) замену $x_1 \to \tilde{x}_1 = -x_1$, получаем, что $\overline{u}'''(0) > 0$. Противоречие доказывает, что глобального решения, 1-периодического по $x_2, \ldots, x_n$, не существует. ▷

Условие на убывание коэффициента $k(x)$ при $|x| \to \infty$ также не может быль улучшено и заменено на оценку $k(x) \geqslant c_1 \exp\{-c_2|x_1|^3\}$, $c_1, c_2 = \mathrm{const} > 0$. Для функци $u(x) = (x_1^2 + 1)^{3/2}$ имеем

$$\Delta^2 u = \frac{9}{(x_1^2 + 1)^{5/2}} = k(x) e^u,$$

где

$$k(x) = \frac{9 \exp\left\{-(x_1^2 + 1)^{3/2}\right\}}{(x_1^2 + 1)^{5/2}}.$$

Литература

1. *Векуа И. Н.* О некоторых свойствах решений уравнения Гаусса // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова.—1961.—Т. 64.—С. 5–8.
2. *Олейник О. А.* Об уравнении $\Delta u + k(x)e^u = 0$ // Успехи матем. наук.—1978.—Т. 33, № 2.—С. 203–204.
3. *Usami H.* Note on the inequality $\Delta u \geqslant k(x)e^u$ in $\mathbb{R}^n$ // Hiroshima Math. J.—1988.—Vol. 18, № 3.—P. 661–668. DOI: 10.32917/hmj/1206129623.
4. *Flavin J. N., Knops R. J., Payne L. E.* Asymptotic behavior of solutions to semi-linear elliptic equations on the half-cylinder // Z. Angew. Math. Phys.—1992.—Vol. 43, № 3.—P. 405–421. DOI: 10.1007/BF00946237.
5. *Kuo-Shung Cheng, Chang-Shou Lin* On the conformal Gaussian curvature equation in $\mathbb{R}^2$ // J. Diff. Equ.—1998.—Vol. 146, № 1.—P. 226–250. DOI: 10.1006/jdeq.1998.3424.
6. *Гладков А. Л., Слепченков Н. Л.* О целых решениях полулинейного эллиптического уравнения на плоскости // Дифференц. уравнения.—2006.—Т. 42, № 6.—С. 790–800.
7. *Неклюдов А. В.* Об отсутствии глобальных решений уравнения Гаусса и решений во внешних областях // Изв. вузов. Матем.—2014.—№ 1.—С. 55–60.

8. *Berchio E., Farina A., Ferrero A., Gazzola F.* Existence and stability of entire solutions to a semilinear fourth order elliptic problem // J. Diff. Equ.—2012.—Vol. 252, № 3.—P. 2596–2616. DOI: 10.1016/j.jde.2011.09.028.
9. *Lin C.-S.* A classification of solutions of a conformally invariant fourth order equation in $\mathbb{R}^n$ // Comment. Math. Helv.—1998.—Vol. 73, № 2.—P. 206–231. DOI: 10.1007/s000140050052.
10. *Wei J., Ye D.* Nonradial solutions for a conformally invariant fourth order equation in $\mathbb{R}^4$ // Calc. Var.—2008.—Vol. 32.—P. 373–386. DOI: 10.1007/s00526-007-0145-2.
11. *Warnault G.* Liouville theorems for stable radial solutions for the biharmonic operator // Asymptot. Anal.—2010.—Vol. 69, № 1–2.—P. 87–98. DOI: 10.3233/ASY-2010-0997.
12. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. Матем. института имени В. А. Стеклова.—2001.—Т. 234.—С. 3–383.
13. *Каметака И., Олейник О. А.* Об асимптотических свойствах и необходимых условиях существования решений нелинейных эллиптических уравнений второго порядка // Матем. сб.—1978.—Т. 107, № 4.—С. 572–600.

Статья поступила 15 июня 2023 г.

Неклюдов Алексей Владимирович
Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана,
доцент кафедры высшей математики
РОССИЯ, 105005, Москва, Рубцовская наб., 2/18
E-mail: nekl5@yandex.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2024, Volume 26, Issue 1, P. 123–131

THE ABSENCE OF GLOBAL SOLUTIONS OF THE FOURTH-ORDER GAUSS TYPE EQUATION

Neklyudov, A. V.[1]

[1] Bauman Moscow State Technical University,
2/18 Rubtsovskaya Emb., Moscow 105005, Russia
E-mail: nekl5@yandex.ru

Abstract. We consider solutions of a two-dimensional fourth-order equation with a biharmonic operator and a non-linearity exponential with respect to the solution, an counterpart of the classical Gauss–Bieberbach–Rademacher second-order equation, which was previously considered by many authors in connection with problems of the geometry of surfaces with negative Gaussian curvature, rarefied gas dynamics, and the theory of automorphic functions. Conditions are obtained under which a solution does not exist in a circle of sufficiently large radius. It is shown that global solutions on the plane can exist only if the coefficient of nonlinearity degenerates to infinity at a rate not less than $\exp\{-|x|^2 \ln |x|\}$. It is shown that otherwise the mean value of the solution on a circle of radius r would have to grow to $+\infty$ with an exponential rate as $r \to \infty$. The Pokhozhaev–Mitidieri nonlinear capacity method, based on the choice of appropriate cutting test functions, proves the impossibility of the existence of such a growing global solution. Also, for solutions in $\mathbb{R}^n$ that are periodic in all variables except for one variable x_1, the absence of global solutions is obtained by similar methods when the coefficient degenerates under nonlinearity at a rate slower than $\exp\{-x_1^3\}$.

Keywords: biharmonic operator, Gauss type equation, global solutions, exponential non-linearity, destruction of decisions.

AMS Subject Classification: 35J15.

For citation: *Neklyudov, A. V.* The Absence of Global Solutions of the Fourth-Order Gauss Type Equation, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 1, pp. 123–131 (in Russian). DOI: 10.46698/u2023-1977-8822-o.

References

1. *Vekua, I. N.* Some Properties of Solutions of Gauss's Equation, *Trudy Matematicheskogo Instituta im. V. A. Steklova*, 1961, vol. 64, pp. 5–8.
2. *Oleinik, O. A.* On the Equation $\Delta u + k(x)e^u = 0$, *Russian Mathematical Surveys*, 1978, vol. 33, no. 2, pp. 243–244. DOI: 10.1070/RM1978v033n02ABEH002424.
3. *Usami, H.* Note on the Inequality $\Delta u \geqslant k(x)e^u$ in $\mathbb{R}^n$, *Hiroshima Mathematical Journal*, 1988, vol. 18, no. 3, pp. 661–668. DOI: 10.32917/hmj/1206129623.
4. *Flavin, J. N., Knops, R. J. and Payne, L. E.* Asymptotic Behavior of Solutions to Semi-Linear Elliptic Equations on the Half-Cylinder, *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik*, 1992, vol. 43, no. 3, pp. 405–421. DOI: 10.1007/BF00946237
5. *Kuo-Shung Cheng and Chang-Shou Lin.* On the Conformal Gaussian Curvature Equation in $\mathbb{R}^2$, *Journal of Differential Equations*, 1998, vol. 146, no. 1, pp. 226–250. DOI: 10.1006/jdeq.1998.3424.
6. *Gladkov, A. L. and Slepchenkov, N. L.* On Entire Solutions of a Semilinear Elliptic Equation on the Plane, *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 6, pp. 842–852. DOI: 10.1134/S0012266106060085.
7. *Neklyudov, A. V.* On the Absence of Global Solutions to the Gauss Equation and Solutions in External Areas, *Russian Mathematics* (*Izvestiya VUZ. Matematika*), 2014, vol. 58, no. 1, pp. 47–51. DOI: 10.3103/S1066369X14010058.
8. *Berchio, E., Farina, A., Ferrero, A. and Gazzola, F.* Existence and stability of Entire Solutions to a Semi-Linear Fourth Order Elliptic Problem, *Journal of Differential Equations*, 2012, vol. 252, no. 3, pp. 2596–2616. DOI: 10.1016/j.jde.2011.09.028.
9. *Lin, C.-S.* A Classification of Solutions of a Conformally Invariant Fourth Order Equation in $\mathbb{R}^n$, *Commentarii Mathematici Helvetici*, 1998, vol. 73, no. 2, pp. 206–231. DOI: 10.1007/s000140050052.
10. *Wei, J. and Ye, D.* Nonradial Solutions for a Conformally Invariant Fourth Order Equation in $\mathbb{R}^4$, *Calculus of Variations and Partial Differential*, 2008, vol. 32, pp. 373–386. DOI: 10.1007/s00526-007-0145-2.
11. *Warnault, G.* Liouville Theorems for Stable Radial Solutions for the Biharmonic Operator, *Asymptotic Analysis*, 2010, vol. 69, no. 1–2, pp. 87–98. DOI: 10.3233/ASY-2010-0997.
12. *Mitidieri, E. and Pokhozhaev, S. I.* A Priori Estimates and the Absence of Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations and Inequalities, *Trudy Matematicheskogo Instituta im. V. A. Steklova*, 2001, vol. 234, pp. 3–383 (in Russian).
13. *Kametaka, I. and Oleinik, O. A.* On the Asymptotic Properties and Necessary Conditions for Existence of Solutions of Nonlinear Second Order Elliptic Equations, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1979, vol. 35, no. 6, pp. 823–849. DOI: 10.1070/SM1979v035n06ABEH001626.

Received June 15, 2023

Aleksey V. Neklyudov
Bauman Moscow State Technical University,
2/18 Rubtsovskaya Emb., Moscow 105005, Russia,
Associate Professor
E-mail: `nekl5@yandex.ru`