Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 1, С. 49–65

УДК 517.929.4+519.21
DOI 10.23671/VNC.2020.1.57571

УСТОЙЧИВОСТЬ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Р. И. Кадиев[1,2]

[1]Дагестанский государственный университет,
Россия, 367000, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43 а;
[2]Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН,
Россия, 367032, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45

E-mail: `kadiev_r@mail.ru`

Аннотация. Исследуются вопросы $2p$-устойчивости ($1 \leqslant p < \infty$) систем двух линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями и с импульсными воздействиями по одной компоненте решений на основе теории положительно обратимых матриц. Для этого применяются идеи и методы, разработанные Н. В. Азбелевым и его учениками для исследования вопросов устойчивости детерминированных функционально-дифференциальных уравнений. Приводятся достаточные условия $2p$-устойчивости и экспоненциальной $2p$-устойчивости ($1 \leqslant p < \infty$) систем двух линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями и с импульсными воздействиями по одной компоненте решений в терминах положительной обратимости матриц, построенных по параметрам исходных систем. Проверяется выполнимость этих условий для конкретных уравнений. Получены достаточные условия экспоненциальной моментной устойчивости системы двух детерминированных линейных дифференциальных уравнений с постоянными запаздываниями и коэффициентами с импульсными воздействиями по одной компоненте решений в терминах параметров этой системы. Показано, что в этом случае из общих утверждений можно получить новые результаты для исследуемой системы.

Ключевые слова: уравнения Ито, устойчивость решений, импульсные воздействия, положительная обратимость матрицы.

Mathematical Subject Classification (2010): 34K20, 34K50.

Образец цитирования: *Кадиев Р. И.* Устойчивость импульсных систем двух линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 1.—С. 49–65. DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57571.

1. Введение

Стохастические дифференциальные уравнения описывают многие реальные, практически важные задачи современной физики, биологии, экономики, кибернетики и т. д. Импульсные дифференциальные уравнения Ито с последействием являются хорошей математической моделью для финансовых процессов. Среди различных вопросов, возникающих при решении таких задач, один из важнейших — вопрос об устойчивости решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями.

Исследования устойчивости систем со случайными параметрами приобрели широкий размах после появления в 1960 г. работы И. Я. Каца и Н. Н. Красовского, в которой даны основополагающие определения стохастической устойчивости и впервые применены функции Ляпунова в исследованиях вопросов устойчивости для таких систем. Исследованию вопросов устойчивости для уравнений Ито с последействием методом функционалов Ляпунова — Красовского — Разумихина посвящено большое количество работ как отечественных, так и зарубежных математиков. Достаточно полный их список приведен в монографиях [1–4]. Однако применение этих методов во многих случаях встречало серьезные трудности. Поэтому эффективные признаки устойчивости обычно удавалось доказывать лишь для сравнительно узких классов стохастических функционально-дифференциальных уравнений. В детерминированном случае при исследовании вопросов устойчивости высокую эффективность показал метод вспомогательных или «модельных» уравнений — «W-метод» Н. В. Азбелева. Этот метод применительно к стохастическим функционально-дифференциальным уравнениям развит автором данной статьи. Он является, в принципе, универсальным методом. Это не означает, конечно, что он всегда дает наилучшие результаты. Однако, по крайней мере, этот метод может помочь во многих «безнадежных» ситуациях, где трудно использовать более традиционный «инструментарий». Этот метод позволяет обойти некоторые трудности традиционных схем, возникающие при изучении вопросов устойчивости для уравнений с неограниченными запаздываниями, со случайными коэффициентами и запаздываниями, а также с импульсными воздействиями. Устойчивость решений по Ляпунову относительно начальной функции для детерминированных импульсных дифференциальных уравнений исследовалась в работах [5–8]. Для импульсных дифференциальных уравнений Ито с последействием вопросы устойчивости решений по начальной функции ранее, по-видимому, другими авторами не рассматривались. Некоторым вопросам устойчивости решений для систем линейных дифференциальных уравнений Ито с последействием и с импульсными воздействиями по всем компонентам решений посвящены работы [9–12]. В этих работах исследование проведено по аналогии с работой [8], т. е. методом вспомогательных или «модельных» уравнений, который подробно изложен в работах [13–15].

В настоящей работе изучаются вопросы $2p$-устойчивости и экспоненциальной $2p$-устойчивости ($1 \leqslant p < \infty$) для систем двух линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями и с импульсными воздействиями по одной компоненте решений. При этом применяются принципы метода вспомогательных уравнений и теория положительно обратимых матриц. Отличие от классического метода вспомогательных уравнений состоит в том, что каждое уравнение системы преобразуется независимо от остальных, а каждая компонента решения оценивается отдельно. Такой подход, в сочетании с теорией положительно обратимых матриц, позволяет получить новые результаты, в том числе и в детерминированном случае, а также эффективно исследовать вопросы устойчивости для уравнений с импульсными воздействиями.

2. Предварительные сведения и объект исследования

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F})_{t\geqslant 0}, P)$ — стохастический базис; k^2 — линейное пространство 2-мерных $\mathscr{F}_0$-измеримых случайных величина; $\mathscr{B}_i$, $i = 2, \ldots, m$, — независимые стандартные винеровские процессы согласованные с потоком $(\mathscr{F})_{t\geqslant 0}$; $1 \leqslant p < \infty$; c_p — положительное число, зависящее от p [16, с. 65] и используемое в оценке (3); E — символ математического ожидания; $\overline{E}$ — единичная 2×2-матрица; $|\cdot|$ — норма в R^2; $\|\cdot\|$ — норма 2×2-матрицы, согласованная с нормой в R^2; $\|\cdot\|_X$ — норма в нормированном пространстве X; μ — мера Лебега на $[0, +\infty)$.

Пусть $B = (b_{ij})_{i,j=1}^2$ — 2×2-матрица. Матрица B называется неотрицательной, если $b_{ij} \geqslant 0$, $i,j = 1,2$, и положительной, если $b_{ij} > 0$, $i,j = 1,2$.

Очевидно, что матрица $B = (b_{ij})_{i,j=1}^2$ с $b_{12} \leqslant 0$, $b_{21} \leqslant 0$ положительно обратима, если главные диагональные миноры матрицы B положительны. В рамках этой статьи мы будем пользоваться этим признаком положительной обратимости 2×2-матрицы с неположительными внедиаганальными элементами. Более общие признаки положительной обратимости матриц можно найти в [17].

В данной работе исследуются вопросы устойчивости для системы двух линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями и с импульсными воздействиями по одной компоненте решений вида

$$\begin{gathered} dx(t) = -\sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(t)x(h_{1j}(t))\,dt + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(t)x(h_{ij}(t))\,d\mathscr{B}_i(t) \quad (t \geqslant 0), \\ x_2(\mu_j) = B_j x_2(\mu_j - 0), \quad j = 1,2,3,\dots, \quad \text{почти наверно (п. н.)}, \end{gathered} \tag{1}$$

относительно начальных данных

$$x(t) = \varphi(t) \quad (t < 0), \tag{1a}$$

$$x(0) = b, \tag{1b}$$

где

1) $x = \mathrm{col}(x_1, x_2)$ — 2-мерный неизвестный случайный процесс;

2) $A_{ij} = (a_{sk}^{ij})_{s,k=1}^2$ — 2×2-матрица при $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,m_i$, элементами матриц A_{1j}, $j = 1,\dots,m_1$, являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, траектории которых п. н. локально суммируемы, а элементами матриц A_{ij}, $i = 2,\dots,m$, $j = 1,\dots,m_i$, являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, траектории которых п. н. локально суммируемы с квадратом;

3) h_{ij}, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,m_i$, — измеримые по Борелю функции, заданные на $[0,\infty)$ такие, что $h_{ij}(t) \leqslant t$ $(t \in [0,\infty))$ μ-почти всюду, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,m_i$;

4) μ_j, $j = 1,2,3,\dots,$ — действительные числа такие, что $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$, $\lim_{j\to\infty}\mu_j = \infty$;

5) B_j, $j = 1,2,3,\dots,$ — отличные от нуля действительные числа;

6) $\varphi = \mathrm{col}(\varphi_1,\varphi_2)$ — $\mathscr{F}_0$-измеримый 2-мерный случайный процесс;

7) $b = \mathrm{col}(b_1,b_2)$ — $\mathscr{F}_0$-измеримая 2-мерная случайная величина, т. е. $b \in k^2$.

Пусть в дальнейшем: D^2 — линейное пространство 2-мерных прогрессивно измеримых случайных процессов на $[0,+\infty)$, траектории которых п. н. непрерывно справа и имеют пределы слева; L^2 — линейное пространство 2-мерных случайных процессов на $(-\infty,0)$, которые не зависят от винеровских процессов $\mathscr{B}_i$, $i = 2,\dots,m$, и имеет п. н. ограниченные в существенном траектории; $\gamma : [0,+\infty) \to R^1$ — положительная непрерывная функция.

Решение задачи (1), (1a), (1b) это 2-мерный случайный процесс $x = \mathrm{col}(x_1,x_2)$ из пространства D^2 такой, что $x_2(\mu_j) = B_j x_2(\mu_j - 0)$, $j = 1,2,3,\dots,$ п. н. и

$$\begin{gathered} x(t) = x(\mu_j) - \sum_{j=1}^{m_1}\int_{\mu_j}^{t} A_{1j}(s)x(h_{1j}(s))ds + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\int_{\mu_j}^{t} A_{ij}(s)x(h_{ij}(s))d\mathscr{B}_i(s) \\ (t \in [\mu_j,\mu_{j+1})), \quad j = 0,1,2,3,\dots, \\ x(0) = b, \quad x(t) = \varphi(t) \quad (t < 0), \end{gathered}$$

где интегралы понимаются в смысле Лебега и Ито соответственно.

Отметим, что при сделанных предположениях задача (1), (1a), (1b) имеет единственное решение [18]. Обозначим через $x(t,b,\varphi)$ решение системы (1), удовлетворяющее условиям (1a) и (1b), т. е. $x(t,b,\varphi)=\varphi(t)$ при $t<0$ и $x(0,b,\varphi)=b$. Очевидно, что $x(\cdot,b,\varphi)\in D^2$.

Введем следующие обозначения линейных нормированных подпространств пространств D^2, k^2, L^2:

$$M_p^\gamma=\Big\{x:\ x\in D^2,\ \|x\|_{M_p^\gamma}\overset{\text{def}}{=}\sup_{t\geqslant 0}\big(E\,|\gamma(t)x(t)|^p\big)^{1/p}<\infty\Big\}\quad \big(M_p^1=M_p\big);$$

$$k_p^2=\Big\{\alpha:\ \alpha\in k^2,\ \|\alpha\|_{k_p^2}\overset{\text{def}}{=}\big(E|\alpha|^p\big)^{1/p}<\infty\Big\};$$

$$L_p^2=\Big\{\varphi:\ \varphi\in L^2,\ \|\varphi\|_{L_p^2}\overset{\text{def}}{=}\operatorname{vrai}\sup_{\nu<0}\big(E|\varphi(\nu)|^p\big)^{1/p}<\infty\Big\}.$$

Определение 1. Систему (1) называют:

– *p-устойчивой* относительно начальных данных, если для любого $\epsilon>0$ найдется такое $\delta(\epsilon)>0$, что при любых $b\in k_p^2$, $\varphi\in L_p^2$ и $\|b\|_{k_p^2}+\|\varphi\|_{L_p^2}<\delta(\epsilon)$ будет выполнено неравенство $(E|x(t,b,\varphi)|^p)^{1/p}\leqslant\epsilon$ для любого $t\geqslant 0$;

– *асимптотически p-устойчивой* относительно начальных данных, если оно p-устойчиво, и, кроме того, для любых $b\in k_p^2$, $\varphi\in L_p^2$ и $\|b\|_{k_p^2}+\|\varphi\|_{L_p^2}<\delta(\epsilon)$ будет $\lim_{t\to+\infty}(E|x(t,b,\varphi)|^p)^{1/p}=0$;

– экспоненциально *p-устойчивой* относительно начальных данных, если существуют положительные числа K, λ такие, что для решений $x(t,b,\varphi)$ задачи (1), (1a), (1b) выполнено неравенство $(E|x(t,b,\varphi)|^p)^{1/p}\leqslant K\exp\{-\lambda t\}(\|b\|_{k_p^2}+\|\varphi\|_{L_p^2})$ $(t\geqslant 0)$.

Заметим, что в предыдущих определениях величина b — случайная величина, φ — случайный процесс. В известных определениях их считают детерминированными.

Определение 2. Систему (1) назовем *M_p^γ-устойчивым*, если для любых $b\in k_p^2$, $\varphi\in L_p^2$ для решения задача (1), (1a), (1b) $x(\cdot,b,\varphi)$ имеем $x(\cdot,b,\varphi)\in M_p^\gamma$ и выполнено неравенство

$$\big\|x(\cdot,b,\varphi)\big\|_{M_p^\gamma}\leqslant c\big(\|b\|_{k_p^2}+\|\varphi\|_{L_p^2}\big) \tag{2}$$

для некоторого положительного числа c.

Очевидно, что

– из M_p-устойчивости системы (1) следует p-устойчивость этой же системы относительно начальных данных;

– из M_p^γ-устойчивости сиситемы (1) (где $\gamma(t)\geqslant\delta>0$ $(t\geqslant 0)$ и $\lim_{t\to+\infty}\gamma(t)=+\infty$) следует асимптотическая p-устойчивость этой же системы относительно начальных данных;

– из M_p^γ-устойчивости ситемы (1) (где $\gamma(t)=\exp\{\lambda\}$, λ — некоторое положительное число) следует экспоненциальная p-устойчивость этой же системы относительно начальных данных.

Лемма 1. *Пусть $f(s)$ — скалярный случайный процесс, интегрируемый по винеровскому процессу $\mathscr{B}(s)$ на отрезке $[0,t]$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left(E\left|\int\limits_0^t f(s)\,d\mathscr{B}(s)\right|^{2p}\right)^{1/2p}\leqslant c_p\left(E\left(\int\limits_0^t|f(s)|^2\,d(s)\right)^p\right)^{1/2p}, \tag{3}$$

где c_p — некоторое число, зависящее от p.

Справедливость неравенства (3) следует из неравенства 4 работы [16, с. 65], где приведено и конкретное выражение для c_p.

Лемма 2. *Пусть* $g(s)$ *— скалярная функция на* $[0,\infty)$*, квадрат которой локально суммируем,* $f(s)$ *— скалярный случайный процесс такой, что* $\sup_{s\geqslant 0}(E|f(s)|^{2p})^{1/2p}<\infty$*. Тогда справедливы следующие неравенства*

$$\sup_{t\geqslant 0}\left(E\left|\int\limits_0^t g(s)f(s)\,ds\right|^{2p}\right)^{1/2p}\leqslant \sup_{t\geqslant 0}\left(\int\limits_0^t |g(s)|\,ds\right)\sup_{s\geqslant 0}\left(E\,|f(s)|^{2p}\right)^{1/2p}, \tag{4}$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\left(E\left|\int\limits_0^t (g(s))^2(f(s))^2\,ds\right|^{p}\right)^{1/2p}\leqslant \sup_{t\geqslant 0}\left(\int\limits_0^t (g(s))^2\,ds\right)^{1/2}\sup_{s\geqslant 0}\left(E\,|f(s)|^{2p}\right)^{1/2p}. \tag{5}$$

Справедливость леммы доказана в работе [19].

3. Метод исследования

Как было отмечено во введении, устойчивость системы (1) будем проверять преобразованием системы (1), с помощью вспомогательного (модельного) уравнения, в другое, более простое, уравнение, для которого непосредственно можно проверить условия, обеспечивающие устойчивость систем (1).

Наряду с системой (1) рассмотрим систему двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями по одной компоненте решений вида

$$\begin{aligned} dx(t)&=\big[B(t)x(t)+f(t)\big]dt \quad (t\geqslant 0),\\ x_2(\mu_j)&=B_jx_2(\mu_j-0), \quad j=1,2,3,\dots, \end{aligned} \tag{6}$$

где $B(t)$ — 2×2-матрица, элементы которой измеримые по Лебегу функция и $f(t)$ — 2-мерная измеримая по Лебегу функция, B_j, μ_j, $j=1,2,3,\dots,$ — те же самые величины, что и для системы (1).

Для системы (6) рассмотрим соответствующую линейную однородную систему вида

$$\begin{aligned} dx(t)&=B(t)x(t) \quad (t\geqslant 0)\\ x_2(\mu_j)&=B_jx_2(\mu_j-0), \quad j=1,2,3,\dots \end{aligned} \tag{7}$$

Определение 3. 2×2-матрица $X(t)$ $(t\geqslant 0)$, столбцы которой являются решениями системы (7) и $X(0)=\overline{E}$, назовем *фундаментальной матрицей* для системы (6).

В силу того, что через любое $x_0\in\mathbb{R}^n$ проходит единственное решение системы (7), имеем $\det X(t)\neq 0$ при $t\geqslant 0$.

Непосредственно, методом вариации постоянных, можно убедится в справедливости следующей леммы.

Лемма 3. *Для решения системы* (6)*, проходящего через* x_0*, имеет место представление*

$$x(t)=X(t)x_0+\int\limits_0^t X(t)X(s)^{-1}f(s)\,ds \quad (t\geqslant 0).$$

Используя систему (6) и лемму 3, задачу (1), (1a), (1b) можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$x(t)=X(t)b+(\Theta x)(t)+(C\varphi)(t) \quad (t\geqslant 0), \tag{8}$$

где

$$(\Theta x)(t) = \int\limits_0^t X(t)X(s)^{-1}\Big[B(s) - \sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(s)\,\bar{x}(h_{1j}(s))\Big]\,ds$$

$$+ \int\limits_0^t X(t)X(s)^{-1}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(s)\,\bar{x}(h_{ij}(s))\,d\mathscr{B}_i(s),$$

$$(C\varphi)(t) = \int\limits_0^t X(t)X(s)^{-1}\Big[-\sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(s)\,\bar{\varphi}(h_{1j}(s))\Big]\,ds$$

$$+ \int\limits_0^t X(t)X(s)^{-1}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(s)\,\bar{\varphi}(h_{ij}(s))\,d\mathscr{B}_i(s),$$

где $\bar{x}(t)$ — неизвестный 2-мерный случайный процесс на $(-\infty,\infty)$ такой, что $\bar{x}(t)=0$ при $t<0$, и $\bar{\varphi}(t)$ — известный 2-мерный случайный процесс на $(-\infty,\infty)$ такой, что $\bar{\varphi}(t)=\varphi(t)$ при $t\in(-\infty,0)$ и $\bar{\varphi}(t)=0$ при $t\in[0,+\infty)$.

Приведем следующую теорему, которая следует из результатов работы [9], а также в справедливости которой можно убедиться и непосредственно.

Теорема 1. *Пусть при любых $b\in k_p^2$, $\varphi\in L_p^2$ для системы* (8) *имеем*

$$\|Xb\|_{M_p^\gamma} \leqslant c_1\|b\|_{k_p^n}, \quad \|\Theta x\|_{M_p^\gamma} \leqslant c_2\|x\|_{M_p^\gamma}, \quad \|C\varphi\|_{M_p^\gamma} \leqslant c_3\|\varphi\|_{L_p^2},$$

где c_1, c_2, c_3 — некоторые положительнее числа и $c_2<1$. Тогда система (1) *M_p^γ-устойчиво.*

На основе этой теоремы в работе [9] получены достаточные условия p-устойчивости относительно начальных данных систем вида (1) в терминах параметров этих систем.

Для $x(t)=\mathrm{col}(x_1(t),x_2(t))$ $(t\geqslant 0)$ обозначим $\bar{x}_i^\gamma = \sup_{t\geqslant 0}(E|\gamma(t)x_i(t)|^p)^{1/p}$, $i=1,2$, $\bar{x}^\gamma=\mathrm{col}(\bar{x}_1^\gamma,\bar{x}_2^\gamma)$.

Пусть для некоторого $\gamma(t)$, $t\in[0,\infty)$, переходя к оценкам в каждом уравнении системы (8), нам удалось получить матричное неравенство следующего вида:

$$\overline{E}\,\bar{x}^\gamma \leqslant C\bar{x}^\gamma + \bar{c}\,\|b\|_{k_p^n}\widehat{E} + \hat{c}\,\|\varphi\|_{L_p^2}\widehat{E}, \tag{9}$$

где C — некоторая 2×2-матрица, $\bar{c}$, $\hat{c}$ — некоторые положительные числа, $\widehat{E}$ — 2-мерный вектор, все элементы которой равны единице. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если матрица $\overline{E}-C$ положительно обратима, то система* (1) *M_p^γ-устойчива.*

◁ В предположениях теоремы мы имеем: матрица $\overline{E}-C$ положительно обратима. Следовательно, неравенство (9) можно переписать в следующем виде:

$$\overline{E}\,\bar{x}^\gamma \leqslant \big(\overline{E}-C\big)^{-1}\big(\bar{c}\,\|b\|_{k_p^n}\widehat{E} + \hat{c}\,\|\varphi\|_{L_p^2}\widehat{E}\big).$$

Тогда из предыдущего неравенства получаем

$$\big|\bar{x}^\gamma\big| \leqslant K\big(\|b\|_{k_p^n} + \|\varphi\|_{L_p^2}\big), \tag{10}$$

где $K=\|(\bar{E}-C)^{-1}\|\,|\widehat{E}|\max\{\bar{c},\hat{c}\}$. Поскольку $x(t,b,\varphi)=x(t)$ и $\|x(\cdot,b,\varphi)\|_{M_p^\gamma}\leqslant|\bar{x}^\gamma|$, то из неравенства (10) следует, что для любых $b\in k_p^2$, $\varphi\in L_p^2$ имеем

$$\big\|x(\cdot,b,\varphi)\big\|_{M_p^\gamma} \leqslant c\big(\|b\|_{k_p^n} + \|\varphi\|_{L_p^2}\big),$$

где c — некоторое положительное число. Следовательно, система (1) M_p^γ-устойчиво. ▷

В следующем параграфе на основе теоремы 2 будут получены достаточные условия M_{2p}^{γ}-устойчивости системы (1) в терминах параметров этой системы.

4. Экспоненциальная устойчивость

В дальнейшем предположим, что $\gamma(t) = \exp\{\lambda t\}$ $(t \in [0,\infty))$, где λ — некоторое положительное число, $0 \leqslant t - h_{ij}(t) \leqslant \tau_{ij}$ $(t \in [0,\infty))$ μ-почти всюду при $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,m_i$, для некоторых положительных чисел τ_{ij}, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,m_i$, существуют индексы $I_s \in \{1,\dots,m_1\}$, $s = 1,2$, и положительные числа ρ, σ, B, $\bar{a}_s$, $\bar{a}_{sk}^{ij}$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,m_i$, $s,k = 1,2$, такие, что для системы (1) имеют место следующие неравенства:

$$|B_j| \leqslant B,\ j = 1,2,\dots,\quad \rho \leqslant \mu_{j+1} - \mu_j \leqslant \sigma \text{ при } j = 1,2,\dots,$$

$$\left|a_{sk}^{ij}(t)\right| \leqslant \bar{a}_{sk}^{ij},\quad t \in [0,+\infty),\ i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,m_i,\ s,k = 1,2,\ P\times\mu\text{-почти всюду},$$

$$\sum_{k\in I_s} a_{ss}^{1k}(t) \geqslant \bar{a}_s,\quad t \in [0,+\infty),\ s = 1,2,\ P\times\mu\text{-почти всюду},$$

и для некоторого положительного числа D выполнено неравенство

$$\exp\{-\bar{a}_2 t\} \prod_{0<\mu_j\leqslant t} |B_j| < D \text{ при } t \in [0,+\infty).$$

Пусть C — 2×2-матрица, элементы которой определены следующим образом:

$$c_{11} = 1 - \frac{1}{\bar{a}_1}\left[\sum_{k\in I_1}\sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{11}^{1k}\tau_{1k}\,\bar{a}_{11}^{1j} + \sum_{j=1,\,j\notin I_1}^{m_1} \bar{a}_{11}^{1j}\right] - c_p\left(\frac{1}{2\bar{a}_1}\right)^{1/2}\left[\sum_{k\in I_1}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{11}^{1k}\sqrt{\tau_{1k}}\,\bar{a}_{11}^{ij} + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{11}^{ij}\right],$$

$$c_{12} = -\frac{1}{\bar{a}_1}\left[\sum_{k\in I_1}\sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{11}^{1k}\tau_{1k}\,\bar{a}_{12}^{1\nu} + \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{12}^{1\nu}\right] - c_p\left(\frac{1}{2\bar{a}_1}\right)^{1/2}\left[\sum_{k\in I_1}\sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{11}^{1k}\sqrt{\tau_{1k}}\,\bar{a}_{12}^{i\nu} + \sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{12}^{i\nu}\right],$$

$$c_{22} = 1 - \frac{\max\{1,B\}(1-\exp\{-\bar{a}_2\sigma\})}{\bar{a}_2(1-\exp\{-\bar{a}_2\rho\}B)}\left[\sum_{k\in I_2}\sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{22}^{1k}\tau_{1k}\,\bar{a}_{22}^{1j} + \sum_{j=1,\,j\notin I_2}^{m_1} \bar{a}_{22}^{1j}\right] - c_p\left(\frac{\max\{1,B^2\}(1-\exp\{-2\bar{a}_2\sigma\})}{2\bar{a}_2(1-\exp\{-2\bar{a}_2\rho\}B^2)}\right)^{1/2}\left[\sum_{k\in I_2}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{22}^{1k}\sqrt{\tau_{1k}}\,\bar{a}_{22}^{ij} + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}_{22}^{ij}\right],$$

$$c_{21} = -\frac{\max\{1,B\}(1-\exp\{-\bar{a}_2\sigma\})}{\bar{a}_2(1-\exp\{-\bar{a}_2\rho\}B)}\left[\sum_{k\in I_2}\sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{22}^{1k}\tau_{1k}\,\bar{a}_{21}^{1\nu} + \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{21}^{1\nu}\right] - c_p\left(\frac{\max\{1,B^2\}(1-\exp\{-2\bar{a}_2\sigma\})}{2\bar{a}_2(1-\exp\{-2\bar{a}_2\rho\}B^2)}\right)^{1/2}\left[\sum_{k\in I_2}\sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{22}^{1k}\sqrt{\tau_{1k}}\,\bar{a}_{21}^{i\nu} + \sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{21}^{i\nu}\right].$$

Теорема 3. *Если $c_{11} > 0$, $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} > 0$, то система* (1) *$M^{\gamma}_{2p}$-устойчива для некоторого положительного числа λ.*

$\lhd$ Систему (1) с условиями (1a) запишем в следующем виде:

$$d\bar{x}_s(t) = -\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{k=1}^{2} a^{1j}_{sk}(t)\big[\bar{x}_k(h_{1j}(t)) + \bar{\varphi}_k(h_{1j}(t))\big]\,dt$$
$$-\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{2} a^{ij}_{sk}(t)\big[\bar{x}_k(h_{ij}(t)) + \bar{\varphi}_k(h_{ij}(t))\big]\,d\mathscr{B}_i(t) \quad (t \geqslant 0),\ s = 1,2, \tag{11}$$
$$\bar{x}_2(\mu_j) = B_j\bar{x}_2(\mu_j - 0),\ j = 1,2,3,\dots,\ \text{п. н.},$$

где $\bar{x}_s(t)$ — неизвестный скалярный случайный процесс на $(-\infty,\infty)$ такой, что $\bar{x}_s(t) = 0$ при $t < 0$, и $\bar{\varphi}_s(t)$ — известный скалярный случайный процесс на $(-\infty,\infty)$ такой, что $\bar{\varphi}_s(t) = \varphi_s(t)$ при $t \in [-\widehat{\sigma}, 0)$ и $\bar{\varphi}_s(t) = 0$ при $t \in (-\infty, -\widehat{\sigma}) \cup [0,+\infty)$ для $s = 1,2$ и $\widehat{\sigma} = \max\{\tau_{ij},\ i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,m_i\}$. Обозначим через $\bar{x}(t,b,\bar{\varphi})$ решение системы (11), удовлетворяющее условию (1b). Очевидно, что решение задачи (11), (1b) при $t \geqslant 0$ совпадает с решением задачи (1), (1a), (1b), т. е. $x(t,b,\varphi) = \bar{x}(t,b,\bar{\varphi})$ при $t \geqslant 0$.

Если в системе (11) сделать замену $\bar{x}_s(t) = \exp\{-\lambda t\}y_s(t)$, где $y_s(t)$ — неизвестный скалярный случайный процесс на $(-\infty,\infty)$ такой, что $y_s(t) = 0$ при $t < 0$, $0 < \lambda < \min\{\bar{a}_s,\ s = 1,2\}$ для $s = 1,2$, то получим систему

$$dy_s(t) = \Big[\lambda y_s(t) - \sum_{j=1}^{m_1}\sum_{k=1}^{2} a^{1j}_{sk}(t)\big[\exp\{\lambda(t - h_{1j}(t))\}\,y_k(h_{1j}(t)) + \exp\{\lambda t\}\bar{\varphi}_k(h_{1j}(t))\big]\Big]dt$$
$$+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{2} a^{ij}_{sk}(t)\big[\exp\{\lambda(t - h_{ij}(t))\}\,y_k(h_{ij}(t)) + \exp\{\lambda t\}\bar{\varphi}_k(h_{ij}(t))\big]\,d\mathscr{B}_i(t) \tag{12}$$
$$(t \geqslant 0), \quad s = 1,2,$$
$$y_2(\mu_j) = B_j y_2(\mu_j - 0), \quad j = 1,2,3,\dots,\ \text{п. н.}$$

Положив $\eta_s(t) = \sum_{k\in I_s} a^{1k}_{ss}(t)\exp\{\lambda(t - h_{1k}(t))\} - \lambda$ при $s = 1,2$ и учитывая, что $\int_{h_{1k}(t)}^{t} dy_s(\tau) = y_s(t) - y_s(h_{1k}(t))$, $k \in I_s$, систему (12) можно переписать в следующем виде:

$$dy_s(t) = \Big[-\eta_s(t)y_s(t) + \sum_{k\in I_s} a^{1k}_{ss}(t)\exp\{\lambda(t - h_{1k}(t))\}$$
$$\times \int\limits_{h_{1k}(t)}^{t} dy_s(\tau) + \sum_{k\in I_s} a^{1k}_{ss}(t)\exp\{\lambda t\}\bar{\varphi}_s(h_{1k}(t))$$
$$+\sum_{j=1}^{m_1}\ \sum_{k=1,\,k\neq s \text{ при } j\in I_s}^{2} a^{1j}_{sk}(t)\big[\exp\{\lambda(t - h_{1j}(t))\}\,y_k(h_{1j}(t)) + \exp\{\lambda t\}\bar{\varphi}_k(h_{1j}(t))\big]\Big]dt \tag{13}$$
$$+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{2} a^{ij}_{sk}(t)\big[\exp\{\lambda(t - h_{ij}(t))\}\,y_k(h_{ij}(t)) + \exp\{\lambda t\}\bar{\varphi}_k(h_{ij}(t))\big]\,d\mathscr{B}_i(t)$$
$$(t \geqslant 0),\ s = 1,2,$$
$$y_2(\mu_j) = B_j y_2(\mu_j - 0), \quad j = 1,2,3,\dots,\ \text{п. н.}$$

Подставляя выражение для $dy_s(t)$ из правой части s-го уравнения системы (12) в s-е уравнение системы (13) при $s=1,2$, получим

$$\begin{gathered} dy_s(t) = \Big[-\eta_s(t)y_s(t) + \sum_{k\in I_s} a_{ss}^{1k}(t)\exp\{\lambda(t-h_{1k}(t))\} \\ \times \int\limits_{h_{1k}(t)}^{t} \Big\{ \Big[\lambda y_s(\tau) + \sum_{j=1}^{m_1}\sum_{k=1}^{2} a_{sk}^{1j}(\tau)\big[\exp\{\lambda(\tau-h_{1j}(\tau))\}\, y_k(h_{1j}(\tau)) \\ + \exp\{\lambda\tau\}\bar\varphi_k(h_{1j}(\tau))\big]\Big] d\tau + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{2} a_{sk}^{ij}(\tau)\big[\exp\{\lambda(\tau-h_{ij}(\tau))\}\, y_k(h_{ij}(\tau)) \\ + \exp\{\lambda\tau\}\bar\varphi_k(h_{ij}(\tau))\big] d\mathscr{B}_i(\tau)\Big\} + \sum_{k\in I_s} a_{ss}^{1k}(t)\exp\{\lambda t\}\bar\varphi_s(h_{1k}(t)) \\ + \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq s \text{ при } j\in I_s}}^{2} a_{sk}^{1j}(t)\big[\exp\{\lambda(t-h_{1j}(t))\}\, y_k(h_{1j}(t)) + \exp\{\lambda t\}\bar\varphi_k(h_{1j}(t))\big]\Big] dt \\ + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{2} a_{sk}^{ij}(t)\big[\exp\{\lambda(t-h_{ij}(t))\}\, y_k(h_{ij}(t)) + \exp\{\lambda t\}\bar\varphi_k(h_{ij}(t))\big] d\mathscr{B}_i(t) \\ (t\geqslant 0),\ s=1,2, \quad y_2(\mu_j) = B_j y_2(\mu_j-0), \quad j=1,2,3,\dots, \text{п. н.} \end{gathered} \tag{14}$$

Из системы (14) с учетом условия (1b), обозначая

$$m_1(t,\varsigma) = \exp\Big\{-\int\limits_{\varsigma}^{t}\mu_1(\zeta)d\zeta\Big\}, \quad m_2(t,\varsigma) = \exp\Big\{-\int\limits_{\varsigma}^{t}\mu_1(\zeta)d\zeta\Big\}\prod_{\varsigma<\mu_j\leqslant t} B_j,$$

представлением для решений скалярных линейных дифференциальных уравнений Ито с импульсными воздействиями [9] получим систему

$$\begin{gathered} y_s(t) = m_s(t,0)b_s + \sum_{k\in I_s}\int\limits_0^t m_s(t,\varsigma)a_{ss}^{1k}(\varsigma)\exp\{\lambda(\varsigma-h_{1k}(\varsigma))\}\int\limits_{h_{1k}(\varsigma)}^{\varsigma}\lambda y_s(\tau)\,d\tau d\varsigma \\ + \sum_{k\in I_s}\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{\nu=1}^{2}\int\limits_0^t m_s(t,\varsigma)a_{ss}^{1k}(\varsigma)\exp\{\lambda(\varsigma-h_{1k}(\varsigma))\}\int\limits_{h_{1k}(\varsigma)}^{\varsigma} a_{s\nu}^{1j}(\tau)\big[\exp\{\lambda(\tau-h_{1j}(\tau))\}y_\nu(h_{1j}(\tau)) \\ + \exp\{\lambda\tau\}\bar\varphi_\nu(h_{1j}(\tau))\big]d\tau d\varsigma = \sum_{k\in I_s}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{\nu=1}^{2}\int\limits_0^t m_s(t,\varsigma)a_{ss}^{1k}(\varsigma)\exp\{\lambda(\varsigma-h_{1k}(\varsigma))\} \\ \times\int\limits_{h_{1k}(\varsigma)}^{\varsigma} a_{s\nu}^{ij}(\tau)\left[\exp\{\lambda(\tau-h_{ij}(\tau))\}y_\nu(h_{ij}(\tau)) + \exp\{\lambda\tau\}\bar\varphi_\nu(h_{ij}(\tau))\right] d\mathscr{B}_i(\tau)d\varsigma \\ + \sum_{k\in I_s}\int\limits_0^t m_s(t,\varsigma)a_{ss}^{1k}(\varsigma)\exp\{\lambda\varsigma\}\bar\varphi_s(h_{1k}(\varsigma))\,d\varsigma + \sum_{j=1}^{m_1}\sum_{k=1,\,k\neq s \text{ при } j\in I_s}^{2}\int\limits_0^t m_s(t,\varsigma)a_{sk}^{1j}(\varsigma) \end{gathered}$$

$$\times\left[\exp\{\lambda(\varsigma-h_{1j}(\varsigma))\}\,y_k(h_{1j}(\varsigma))+\exp\{\lambda\varsigma\}\bar{\varphi}_k(h_{1j}(\varsigma))\right]d\varsigma$$

$$+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{2}\int\limits_0^t m_s(t,\varsigma)a_{sk}^{ij}(\varsigma)\left[\exp\{\lambda(\varsigma-h_{ij}(\varsigma))\}y_k(h_{ij}(\varsigma))+\exp\{\lambda\varsigma\}\bar{\varphi}_k(h_{ij}(\varsigma))\right]d\mathscr{B}_i(\varsigma) \quad (15)$$

$$(t\geqslant 0),\quad s=1,2.$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями

$$\widehat{y}_s=\sup_{t\geqslant 0}\left(E|y_s(t)|^{2p}\right)^{1/2p},\quad \widehat{\varphi}_s=\operatorname{vrai}\sup_{t<0}\left(E|\varphi_s(t)|^{2p}\right)^{1/2p},\quad s=1,2,$$

и следующими очевидными неравенствами:

$$\operatorname{vrai}\sup_{t\geqslant 0}\left(E\,|\exp\{\lambda t\}\bar{\varphi}_s(h_{ij}(t))|^{2p}\right)^{1/2p}\leqslant\exp\{\lambda\tau_{ij}\}\widehat{\varphi}_s,$$
$$s=1,2,\quad i=1,\ldots,m,\quad j=1,\ldots,m_i;$$

$$|m_1(t,\varsigma)|\leqslant\exp\{-(\bar{a}_1-\lambda)(t-\varsigma)\},\quad t\in[0,+\infty),\ \varsigma\in[0,t]\,,\ P\times\mu\text{-почти всюду},$$

$$|m_2(t,\varsigma)|\leqslant\exp\{-(\bar{a}_2-\lambda)(t-\varsigma)\}\prod_{\varsigma<\mu_j\leqslant t}|B_j|,\quad t\in[0,+\infty),\varsigma\in[0,t],\ P\times\mu\text{-почти всюду},$$

а также неравенством

$$\int\limits_0^t\exp\{-(\bar{a}_2-\lambda)(t-\varsigma)\}\prod_{\varsigma<\mu_j\leqslant t}|B_j|\,d\varsigma\leqslant\frac{\max\{1,B\}(1-\exp\{-(\bar{a}_2-\lambda)\sigma\})}{(\bar{a}_2-\lambda)(1-\exp\{-(\bar{a}_2-\lambda)\rho\}B)},$$

доказанными в [8], и неравенством

$$\left(\int\limits_0^t\exp\{-2(\bar{a}_2-\lambda)(t-\varsigma)\}\prod_{\varsigma<\mu_j\leqslant t}(B_j)^2d\varsigma\right)^{1/2}\leqslant\left(\frac{\max\{1,B^2\}(1-\exp\{-2(\bar{a}_2-\lambda)\sigma\})}{2(\bar{a}_2-\lambda)(1-\exp\{-2(\bar{a}_2-\lambda)\rho\}B^2)}\right)^{1/2},$$

справедливость которого следует из предыдущего неравенства.

Из уравнения (15) с учетом предыдущих обозначений и неравенств, а также неравенств (3)–(5) получаем оценки

$$\widehat{y}_s\leqslant\widehat{D}\|b_s\|_{k_{2p}^1}+\lambda L_{1s}\left[\sum_{k\in I_s}\bar{a}_{ss}^{1k}\exp\{\lambda\tau_{1k}\}\tau_{1k}\right]\widehat{y}_s$$
$$+L_{1s}\left[\sum_{k\in I_s}\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{\nu=1}^{2}\bar{a}_{ss}^{1k}\exp\{\lambda\tau_{1k}\}\tau_{1k}\bar{a}_{s\nu}^{1j}\exp\{\lambda\tau_{1j}\}(\widehat{y}_\nu+\widehat{\varphi}_\nu)\right]$$
$$+c_pL_{2s}\left[\sum_{k\in I_s}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{\nu=1}^{2}\bar{a}_{ss}^{1k}\exp\{\lambda\tau_{1k}\}\sqrt{\tau_{1k}}\,\bar{a}_{s\nu}^{ij}\exp\{\lambda\tau_{ij}\}(\widehat{y}_\nu+\widehat{\varphi}_\nu)\right] \quad (16)$$
$$+L_{1s}\left[\sum_{k\in I_s}\bar{a}_{ss}^{1k}\exp\{\lambda\tau_{1k}\}\widehat{\varphi}_s\right]+L_{1s}\left[\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{k=1,\,k\neq s\text{ при }j\in I_s}^{2}\bar{a}_{sk}^{1j}\exp\{\lambda\tau_{1j}\}(\widehat{y}_k+\widehat{\varphi}_k)\right]$$
$$+c_pL_{2s}\left[\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{2}\bar{a}_{sk}^{ij}\exp\{\lambda\tau_{ij}\}(\widehat{y}_k+\widehat{\varphi}_k)\right],\quad s=1,2,$$

где $\widehat{D} = \max\{1, D\}$,

$$L_{11} := \frac{1}{(\bar a_1 - \lambda)}, \quad L_{21} = \left(\frac{1}{2(\bar a_1 - \lambda)}\right)^{1/2},$$

$$L_{12} := \frac{\max\{1, B\}(1 - \exp\{-(\bar a_2 - \lambda)\sigma\})}{(\bar a_2 - \lambda)(1 - \exp\{-(\bar a_2 - \lambda)\rho\}B)},$$

$$L_{22} := \left(\frac{\max\{1, B^2\}(1 - \exp\{-2(\bar a_2 - \lambda)\sigma\})}{2(\bar a_2 - \lambda)(1 - \exp\{-2(\bar a_2 - \lambda)\rho\}B^2)}\right)^{1/2}.$$

Из оценок (16) и с учетом того, что норма в R^2 выбрана так, чтобы $\widehat{\varphi}_j \leqslant \|\varphi\|_{L^2_{2p}}$ при $j = 1, 2$, получаем

$$\widehat{y}_s \leqslant \widehat{D}\, \|b_s\|_{k^1_{2p}} + \sum_{j=1}^{2} N_{sj}(\lambda)\widehat{y}_j + M_s(\lambda)\|\varphi\|_{L^2_{2p}}, \quad s = 1, 2, \tag{17}$$

где

$$N_{ss}(\lambda) := \lambda L_{1s}\left[\sum_{k\in I_s} \bar a^{1k}_{ss} \exp\{\lambda\tau_{1k}\}\tau_{1k}\right]$$
$$+ L_{1s}\left[\sum_{k\in I_s}\sum_{j=1}^{m_1} \bar a^{1k}_{ss} \exp\{\lambda\tau_{1k}\}\tau_{1k}\bar a^{1j}_{ss} \exp\{\lambda\tau_{1j}\} + \sum_{j=0,\, j\notin I_s}^{m_1} \bar a^{1j}_{ss} \exp\{\lambda\tau_{1j}\}\right]$$
$$+ c_p L_{2s}\left[\sum_{k\in I_s}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} \bar a^{1k}_{ss} \exp\{\lambda\tau_{1k}\}\sqrt{\tau_{1k}}\, \bar a^{ij}_{ss} \exp\{\lambda\tau_{ij}\} + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} \bar a^{ij}_{ss} \exp\{\lambda\tau_{ij}\}\right],$$
$$s = 1, 2,$$

$$N_{sj}(\lambda) := L_{1s}\left[\sum_{k\in I_s}\sum_{\nu=0}^{m_1} \bar a^{1k}_{ss} \exp\{\lambda\tau_{1k}\}\tau_{1k}\bar a^{1\nu}_{sj} \exp\{\lambda\tau_{1\nu}\} + \sum_{\nu=1}^{m_1} \bar a^{1\nu}_{sj} \exp\{\lambda\tau_{1\nu}\}\right]$$
$$+ c_p L_{2s}\left[\sum_{k\in I_s}\sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i} \bar a^{1k}_{ss} \exp\{\lambda\tau_{1k}\}\sqrt{\tau_{1k}}\, \bar a^{i\nu}_{sj} \exp\{\lambda\tau_{i\nu}\} + \sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i} \bar a^{i\nu}_{sj} \exp\{\lambda\tau_{i\nu}\}\right],$$
$$s, j = 1, 2,\ s \neq j,$$

$$M_s(\lambda) := L_{1s}\Bigg[\sum_{k\in I_s}\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{\nu=1}^{2} \bar a^{1k}_{ss} \exp\{\lambda\tau_{1k}\}\tau_{1k}\bar a^{1j}_{s\nu} \exp\{\lambda\tau_{1j}\}$$
$$+ \sum_{k\in I_s} \bar a^{1k}_{ss} \exp\{\lambda\tau_{1k}\} + \sum_{j=1}^{m_1}\sum_{k=1,\, k\neq s \text{ при } j\in I_s}^{2} \bar a^{1j}_{sk} \exp\{\lambda\tau_{1j}\}\Bigg]$$
$$+ c_p L_{2s}\left[\sum_{k\in I_s}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{\nu=1}^{2} \bar a^{1k}_{ss} \exp\{\lambda\tau_{1k}\}\sqrt{\tau_{1k}}\, \bar a^{ij}_{s\nu} \exp\{\lambda\tau_{ij}\} + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{\nu=1}^{2} \bar a^{ij}_{s\nu} \exp\{\lambda\tau_{ij}\}\right].$$

Обозначим теперь $y(t) = \mathrm{col}(y_1(t), y_2(t))$, $\bar y = \mathrm{col}(\bar y_1, \bar y_2)$, $M(\lambda) = \mathrm{col}(M_1(\lambda), M_2(\lambda))$ и пусть $C(\lambda) = (c_{ij}(\lambda))^2_{i,j=1}$ — 2×2-матрица, элементы которой определены следующим образом:

$$c_{ss}(\lambda) = 1 - N_{ss}(\lambda),\ s = 1, 2, \quad c_{sj}(\lambda) = -N_{sj}(\lambda),\ s, j = 1, 2,\ s \neq j.$$

Тогда из оценок (17) получаем

$$C(\lambda)\bar{y} \leqslant \widehat{D}\,\|b\|_{k^2_{2p}}\widehat{E} + M(\lambda)\|\varphi\|_{L^2_{2p}}, \tag{18}$$

где $\widehat{E}$ — 2-мерный вектор, элементы которой равны единице. Очевидно также, что $C(0) = C$. В силу условий теоремы матрица C положительно обратима, а тогда при достаточно малых λ матрица $C(\lambda)$ также является положительно обратимой, т. е. существует $\lambda = \lambda_0$ такое, что $C(\lambda_0)$ положительно обратима. Тогда из неравенства (18) получаем

$$|\bar{y}| \leqslant K\big(\|b\|_{k^2_{2p}} + \|\varphi\|_{L^2_{2p}}\big), \tag{19}$$

где $K = \|(C(\lambda_0)^{-1}\||\widehat{E}|\max\{\widehat{D}, |M(\lambda_0)|\}$.

Поскольку $x(t,b,\varphi) = \exp\{-\lambda t\}y(t)$ и $\sup_{t\geqslant 0}(E|y(t)|^{2p})^{1/2p} \leqslant |\bar{y}|$, то из неравенства (19) следует, что существуют положительные числа $\lambda = \lambda_0$, $K = \|(C(\lambda_0)^{-1}\||\widehat{E}|\max\{\widehat{D}, |M(\lambda_0)|\}$ такие, что для решения $x(t,b,\varphi)$ задачи (1), (1a), (1b) выполнено неравенство

$$\big(E|x(t,b,\varphi)|^{2p}\big)^{1/2p} \leqslant K\exp\{-\lambda t\}\big(\|b\|_{k^n_{2p}} + \|\varphi\|_{L^2_{2p}}\big) \quad (t \geqslant 0).$$

Следовательно, система (1) M^{γ}_{2p}-устойчива при некотором положительном λ. $\rhd$

5. Примеры

Рассмотрим систему двух детерминированных линейных дифференциальных уравнений с постоянными запаздываниями и коэффициентами с импульсными воздействиями по одной компоненте решений вида

$$\begin{gathered} dx(t) = -\sum_{j=1}^{m} A_j x(t-h_j)dt \quad (t \geqslant 0), \\ x_2(\mu_j) = B_j x_2(\mu_j - 0), \quad j = 1,2,3,\dots, \end{gathered} \tag{20}$$

где $A_j = (a^j_{sk})^2_{s,k=1}$, $j = 1,\dots,m$, — 2×2-матрицы, элементами которых являются действительные числа, h_j, $j = 1,\dots,m$, — неотрицательные действительные числа, μ_j, $j = 1,2,3,\dots$, — действительные числа такие, что $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$, $\lim_{j\to\infty}\mu_j = \infty$, B_j, $j = 1,2,3,\dots$, — действительные числа.

Утверждение 1. *Пусть для системы* (20) $\sum_{j=1}^{m} a^j_{ss} = a_s > 0$, $s = 1,2$, *существуют положительные числа* B, ρ, σ *такие, что имеют место следующие неравенства:* $|B_j| \leqslant B$, $j = 1,2,\dots$, $\rho \leqslant \mu_{j+1} - \mu_j \leqslant \sigma$ *при* $j = 1,2,\dots$, *для некоторого положительного числа* D *выполнено неравенство* $\exp\{-a_2 t\}\prod_{0<\mu_j\leqslant t}|B_j| < D$ *при* $t \in [0,+\infty)$, $c_{11} > 0$, $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} > 0$, *где*

$$c_{11} = 1 - \frac{1}{a_1}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}|a^k_{11}|h_k|a^j_{11}|,$$

$$c_{12} = -\frac{1}{a_1}\left[\sum_{k=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{m}|a^k_{11}|h_k|a^{\nu}_{12}| + \sum_{\nu=1}^{m}|a^{\nu}_{12}|\right],$$

$$c_{22} = 1 - \frac{\max\{1,B\}(1-\exp\{-a_2\sigma\})}{a_2(1-\exp\{-a_2\rho\}B)}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}|a^k_{22}|h_k|a^j_{22}|,$$

$$c_{21} = -\frac{\max\{1, B\}(1 - \exp\{-a_2\sigma\})}{a_2(1 - \exp\{-a_2\rho\}B)} \left[\sum_{k=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{m} |a_{22}^k| h_k |a_{21}^\nu| + \sum_{\nu=1}^{m} |a_{21}^\nu| \right].$$

Тогда система (20) *экспоненциально устойчива относительно начальных данных.*

Справедливость утверждения вытекает непосредственно из теоремы 3.

Пусть для системы (20) $h_1 = 0$, $a_{ss}^1 > 0$, $s = 1, 2$. В этом случае из теоремы 3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. *Пусть для системы* (20) *существуют положительные числа* B, ρ, σ *такие, что имеют место следующие неравенства:* $|B_j| \leqslant B$, $j = 1, 2, \dots$, $\rho \leqslant \mu_{j+1} - \mu_j \leqslant \sigma$ *при* $j = 1, 2, \dots$, *для некоторого положительного числа* D *выполнено неравенство* $\exp\{-a_{22}^1 t\} \prod_{0<\mu_j\leqslant t} |B_j| < D$ *при* $t \in [0, +\infty)$, $c_{11} > 0$, $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} > 0$, *где*

$$\begin{gathered} c_{11} = 1 - \frac{1}{a_{11}^1} \sum_{j=2}^{m} |a_{11}^j|, \quad c_{12} = -\frac{1}{a_{11}^1} \sum_{\nu=1}^{m} |a_{sj}^\nu|, \\ c_{22} = 1 - \frac{\max\{1, B\}\bigl(1 - \exp\bigl\{-a_{22}^1\sigma\bigr\}\bigr)}{a_{22}^1\bigl(1 - \exp\bigl\{-a_{22}^1\rho\bigr\}B\bigr)} \sum_{j=2}^{m} |a_{22}^j|, \\ c_{21} = -\frac{\max\{1, B\}\bigl(1 - \exp\bigl\{-a_{22}^1\sigma\bigr\}\bigr)}{a_{22}^1\bigl(1 - \exp\bigl\{-a_{22}^1\rho\bigr\}B\bigr)} \sum_{\nu=1}^{m} |a_{21}^\nu|. \end{gathered} \tag{21}$$

Тогда система (20) *экспоненциально устойчива относительно начальных данных.*

Рассмотрим систему двух линейных дифференциальных уравнений Ито с постоянными запаздываниями и коэффициентами с импульсными воздействиями по одной компоненте решений вида

$$\begin{gathered} dx(t) = -\sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}x(t - h_{1j})\,dt + \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}x(t - h_{ij})\,d\mathscr{B}_i(t) \quad (t \geqslant 0), \\ x_2(\mu_j) = B_j x_2(\mu_j - 0), \quad j = 1, 2, 3, \dots, \text{ п. н.}, \end{gathered} \tag{22}$$

где $A_{ij} = (a_{sk}^{ij})_{s,k=1}^2$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, — 2×2-матрицы, элементы которых являются действительными числами, h_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, — неотрицательные действительные числа, μ_j, $j = 1, 2, 3, \dots$, — действительные числа такие, что $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$, $\lim_{j\to\infty} \mu_j = \infty$, B_j, $j = 1, 2, 3, \dots$, — действительные числа.

Утверждение 3. *Пусть для системы* (22) $\sum_{j=1}^{m_1} a_{ss}^{1j} = a_s > 0$, $s = 1, 2$, *существуют положительные числа* B, ρ, σ *такие, что имеют место следующие неравенства:* $|B_j| \leqslant B$, $j = 1, 2, \dots$, $\rho \leqslant \mu_{j+1} - \mu_j \leqslant \sigma$ *при* $j = 1, 2, \dots$, *для некоторого положительного числа* D *выполнено неравенство* $\exp\{-a_2 t\} \prod_{0<\mu_j\leqslant t} |B_j| < D$ *при* $t \in [0, +\infty)$, $c_{11} > 0$, $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} > 0$, *где*

$$\begin{gathered} c_{11} = 1 - \frac{1}{a_1} \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} |a_{11}^{1k}| h_{1k} |a_{11}^{1j}| \\ - c_p \left(\frac{1}{2a_1} \right)^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{m_1} \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} |a_{11}^{1k}| \sqrt{h_{1k}}\, |a_{11}^{ij}| + \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} |a_{11}^{ij}| \right], \end{gathered}$$

$$c_{12} = -\frac{1}{a_1}\left[\sum_{k=1}^{m_1}\sum_{\nu=1}^{m_1}|a_{11}^{1k}|h_{1k}|a_{12}^{1\nu}| + \sum_{\nu=1}^{m_1}|a_{12}^{1\nu}|\right]$$

$$-c_p\left(\frac{1}{2a_1}\right)^{1/2}\left[\sum_{k=1}^{m_1}\sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i}|a_{11}^{1k}|\sqrt{h_{1k}}\,|a_{12}^{i\nu}| + \sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i}|a_{12}^{i\nu}|\right],$$

$$c_{22} = 1 - \frac{\max\{1,B\}(1-\exp\{-a_2\sigma\})}{a_2(1-\exp\{-a_2\rho\}B)}\sum_{k=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_1}|a_{22}^{1k}|h_{1k}|a_{22}^{1j}|$$

$$-c_p\left(\frac{\max\{1,B^2\}(1-\exp\{-2a_2\sigma\})}{2a_2(1-\exp\{-2a_s\rho\}B^2)}\right)^{1/2}\left[\sum_{k=1}^{m_1}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}|a_{22}^{1k}|\sqrt{h_{1k}}\,|a_{22}^{ij}| + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}|a_{22}^{ij}|\right],$$

$$c_{21} = -\frac{\max\{1,B\}(1-\exp\{-a_2\sigma\})}{a_2(1-\exp\{-a_2\rho\}B)}\left[\sum_{k=1}^{m_1}\sum_{\nu=1}^{m_1}|a_{22}^{1k}|h_{1k}|a_{21}^{1\nu}| + \sum_{\nu=1}^{m_1}|a_{21}^{1\nu}|\right]$$

$$-c_p\left(\frac{\max\{1,B^2\}(1-\exp\{-2a_2\sigma\})}{2a_2(1-\exp\{-2a_s\rho\}B^2)}\right)^{1/2}\left[\sum_{k=1}^{m_1}\sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i}|a_{22}^{1k}|\sqrt{h_{1k}}\,|a_{21}^{i\nu}| + \sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i}|a_{21}^{i\nu}|\right].$$

Тогда система (22) экспоненциально $2p$-устойчива относительно начальных данных.

Справедливость утверждения следует из теоремы 3.

Пусть в дальнейшем для системы (22) $m_1 = 1$, $h_{11} = 0$, $a_{ss}^{11} > 0$, $s = 1, \dots, n$. Из теоремы 3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 4. *Пусть для системы (22) существуют положительные числа B, ρ, σ такие, что имеют место следующие неравенства: $|B_j| \leqslant B$, $j = 1, 2, \dots$, $\rho \leqslant \mu_{j+1} - \mu_j \leqslant \sigma$ при $j = 1, 2, \dots$, для некоторого положительного числа D выполнено неравенство $\exp\{-a11_22)t\}\prod_{0<\mu_j\leqslant t}|B_j| < D$ при $t \in [0, +\infty)$, $c_{11} > 0$, $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} > 0$, где*

$$c_{11} = 1 - c_p\left(\frac{1}{2a_{11}^{11}}\right)^{1/2}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}|a_{11}^{ij}|,$$

$$c_{12} = -|a_{12}^{11}|\frac{1}{a_{11}^{11}} - c_p\left(\frac{1}{2a_{11}^{11}}\right)^{1/2}\sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i}|a_{12}^{i\nu}|,$$

$$c_{22} = 1 - c_p\left(\frac{\max\big\{1,B^2\big\}\big(1-\exp\big\{-2a_{22}^{11}\sigma\big\}\big)}{2a_{22}^{11}\big(1-\exp\big\{-2a_{22}^{11}\rho\big\}B^2\big)}\right)^{1/2}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}|a_{22}^{ij}|,$$

$$c_{21} = -|a_{21}^{11}|\frac{\max\big\{1,B\big\}\big(1-\exp\big\{-a_{22}^{11}\sigma\big\}\big)}{a_{22}^{11}\big(1-\exp\big\{-a_{22}^{11}\rho\big\}B\big)}$$

$$-c_p\left(\frac{\max\big\{1,B^2\big\}\big(1-\exp\big\{-2a_{22}^{11}\sigma\big\}\big)}{2a_{22}^{11}\big(1-\exp\big\{-2a_{22}^{11}\rho\big\}B^2\big)}\right)^{1/2}\sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i}|a_{21}^{i\nu}|.$$

Тогда система (22) экспоненциально $2p$-устойчива относительно начальных данных.

Литература

1. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.—М.: Наука, 1981.—448 с.
2. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений.—Рига: Зинатне, 1989.—421 с.

3. *Mao X. R.* Stochastic Differential Equations and Their Applications.—Chichester: Horwood Publishing Ltd., 1997.
4. *Mohammed S.-E. A.* Stochastic differential systems with memory: theory, examples and applications // Stochastic Analysis and Related Topics VI. Proceedings of The Sixth Oslo–Silivri Workshop (Geilo, 1996).—Boston: Birkhäuser, 1998.—P. 1–77. DOI: 10.1007/978-1-4612-2022-0_1.
5. *Anokhin A., Berezansky L., Braverman E.* Exponential stability of linear delay impulsive differential equations // J. Math. Anal. Appl.—1995.—Vol. 193, № 3—P. 923–941. DOI: 10.1006/jmaa.1995.1275.
6. *Berezansky L., Braverman E.* Boundedness and stability of impulsively perturbed delay differential equations // Functional Differential Equations.—1995.—Vol. 3, № 1–2.–P. 19–30.
7. *Bainov D., Stamova I., Vatsala A.* Global stability of sets for linear // Applicable Analysis.—1996.—Vol. 62, № 1–2.—P. 149–160. DOI: 10.1080/00036819608840475.
8. *Berezansky L., Idels L.* On integrable solutions of impulsive delay differential equations // Commun. Appl. Math. Anal.—1998.—Vol. 2.—P. 301–309.
9. *Кадиев Р. И., Поносов А. В.* Устойчивость решений линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с последействием // Дифференц. уравнения.—2007.—Т. 43, № 7.—С. 879–885.
10. *Кадиев Р. И.* Устойчивость решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями по линейному приближению // Дифференц. уравнения.—2013.—Т. 49, № 8.—С. 963–970.
11. *Kadiev R. I, Ponosov A. V.* Stability of impulsive stochastic differential linear functional equations with linear delays // J. of Abstract Differential Equations and Applications.—2012.—Vol. 2, № 2.—P. 7–25.
12. *Кадиев Р. И., Поносов А. В.* Устойчивость решений линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с ограниченными запаздываниями // Дифференц. уравнения.—2010.—Т. 46, № 4.—С. 486–498.
13. *Кадиев Р. И., Поносов А. В.* Устойчивость линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений при постоянно действующих возмущениях // Дифференц. уравнения.—1992.—Т. 28, № 2.—С. 198–207.
14. *Кадиев Р. И.* Достаточные условия устойчивости стохастических систем с последействием // Дифференц. уравнения.—1994.—Т. 30, № 4.—С. 555–564.
15. *Кадиев Р. И.* Устойчивость решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук.—Махачкала, 2000.—234 с.
16. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов.—М.: Наука, 1986.—512 с.
17. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц.—М.: Наука, 1969.—368 с.
18. *Кадиев Р. И.* Существование и единственность решения задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений по семимартингалу // Изв. вузов. Математика.—1995.—№ 10.—С. 35–40.
19. *Кадиев Р. И., Поносов А. В.* Положительная обратимость матриц и устойчивость дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями // Дифференц. уравнения. Минск.—2013.—Т. 53, № 5.—С.579–590. DOI: 10.1134/S0374064117050016.

Статья поступила 22 февраля 2019 г.

Кадиев Рамазан Исмаилович
Дагестанский государственный университет,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 367000, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43 а

Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН,
РОССИЯ, 367032, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45
E-mail: `kadiev_r@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-5630-7744

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 1, P. 49–65

STABILITY OF IMPULSE SYSTEMS OF TWO LINEAR ITO DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY

Kadiev, R. I.[1,2]

[1] Dagestan State University,
43 a M. Gadzhiyeva St., Makhachkala 367000, Russia;
[2] Dagestan Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences,
45 M. Gadzhiyeva St., Makhachkala 367032, Russia
E-mail: kadiev_r@mail.ru

Abstract. The problems $2p$-stability ($1 \leqslant p < \infty$) of systems of two linear Ito differential equations with delay and impulse impacts on one component of solutions are studied on the base of the theory of positively reversible matrices. Ideas and methods developed by N. V. Azbelev and his followers to study the stability problems of deterministic functional-differential equations are applied for this purpose. Sufficient conditions for the $2p$-stability and exponential $2p$-stability of systems of two linear Ito differential equations with delay and impulse impacts on one component of solutions are given in terms of positive reversibility of the matrices constructed from the parameters of the original systems. The validity of these conditions is checked for specific equations. Sufficient conditions for exponential moment stability of a system of two deterministic linear differential equations with constant delay and coefficients with pulse influences on one component of solutions are received in terms of parameters of this system. It is shown that in this case from the general statements it is possible to receive new results for the studied system.

Key words: Ito's equations, stability of solutions, impulse impacts, positive invertibility of a matrix.

Mathematical Subject Classification (2010): 34K20, 34K50.

For citation: *Kadiev, R. I.* Stability of Impulse Systems of Two Linear Ito Differential Equations with Delay, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 1, pp. 49–65 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57571.

References

1. *Kolmanovskiy, V. B. and Nosov, V. R. Ustoychivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemykh sistem s posledeystviem* [Stability and Periodic Regimes of Controlled Systems with Aftereffect], Moscow, Nauka, 1981, 448 p. (in Russian).
2. *Tsar'kov, E. F. Sluchaynye vozmushcheniya differentsial'no-funktsional'nykh uravneniy* [Random Perturbations of Functional-Differential Equations], Riga, Zinatne, 1989, 421 p. (in Russian).
3. *Mao, X. R. Stochastic Differential Equations and Applications*, Chichester, Horwood Publishing Ltd., 1997.
4. *Mohammed, S.-E. A.* Stochastic Differential Systems with Memory: Theory, Examples and Applications, *Stochastic Analysis and Related Topics VI. Proceedings of The Sixth Oslo–Silivri Workshop* (*Geilo, 1996*), Boston, Birkhäuser, 1998, pp. 1–77. DOI: 10.1007/978-1-4612-2022-0_1.
5. *Anokhin, A., Berezansky, L. and Braverman, E.* Exponential Stability of Linear Delay Impulsive Differential Equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1995, vol. 193, no. 3, pp. 923–941. DOI: 10.1006/jmaa.1995.1275.
6. *Berezansky, L. and Braverman, E.* Boundedness and Stability of Impulsively Perturbed Delay Differential Equations, *Functional Differential Equations*, 1995, vol. 3, no 1–2, pp. 19–30.
7. *Bainov, D., Stamova, I. and Vatsala, A.* Global Stability of Sets for Linear, *Applicable Analysis*, 1996, vol. 62, no. 1–2, pp. 149–160. DOI: 10.1080/00036819608840475.
8. *Berezansky, L. and Idels, L.* On Integrable Solutions of Impulsive Delay Differential Equations, *Commun. Appl. Math. Anal.*, 1998, vol. 2, pp. 301–309.
9. *Kadiev, R. I. and Ponosov, A. V.* Stability of Solutions of Linear Impulsive Systems of Itô Differential Equations with Aftereffect, *Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 7, pp. 898–904. DOI: 10.1134/s0012266107070026.

10. *Kadiev, R. I.* Solutions of Nonlinear Impulsive Itô Functional-Differential Equations: Stability by the Linear Approximation, *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 8, pp. 933–940. DOI: 10.1134/s0012266113080028.
11. *Kadiev, R. I. and Ponosov, A. V.* Stability of Impulsive Stochastic Differential Linear Functional Equations with Linear Delays, *Journal of Abstract Differential Equations and Applications*, 2012, vol. 2, no. 2, pp. 7–25.
12. *Kadiev, R. I. and Ponosov, A. V.* Stability of Linear Impulsive Itô Differential Equations with Bounded Delays, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 4, pp. 489–501. DOI: 10.1134/S0012266110040038.
13. *Kadiev, R. I. and Ponosov, A. V.* Stability of Linear Stochastic Functional-Differential Equations with Constantly Acting Perturbations, *Differential Equations*, 1992, vol. 28, no. 2, pp. 173–179.
14. *Kadiev, R. I.* Sufficient Conditions for the Stability of Stochastic Systems with Aftereffect, *Differential Equations*, 1994, vol. 30, no. 4, pp. 509–517.
15. *Kadiev, R. I. Ustoychivost' resheniy stokhasticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy: dissertatsiya . . . doktora fiziko-matematicheskikh nauk* [Stability of Solutions of Stochastic Functional-Differential Equations: Dissertation . . . Doctor of Physico-Mathematical Sciences], Makhachkala, 2000, 234 p. (in Russian).
16. *Liptser, R. Sh. and Shiryaev, A. N. Teoriya martingalov* [Theory of Martingales], Moscow, Nauka, 1986, 512 p. (in Russian).
17. *Bellman R. Vvedenie v teoriyu matrits* [Introduction to Matrix Analysis], Moscow, Nauka, 1969, 368 p. (in Russian).
18. *Kadiev, R. I.* Existence and Uniqueness of the Solution of the Cauchy Problem for Functional-Differential Equations with Respect to a Semimartingale, *Russian Mathematics* (*Izvestiya VUZ. Matematika*), 1995, vol. 39, no. 10, pp. 33–37.
19. *Kadiev, R. I. and Ponosov, A. V.* Positive Invertibility of Matrices and Stability of Itô Delay Differential Equations, *Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 571–582. DOI: 10.1134/S0012266117050019.

Received February 22, 2019

Ramazan I. Kadiev
Dagestan State University,
43 a M. Gadzhiyeva St., Makhachkala 367000, Russia,
Professor
Dagestan Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences,
45 M. Gadzhiyeva St., Makhachkala 367032, Russia,
E-mail: `kadiev_r@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-5630-7744